DIKTAT

MEKANIKA KEKUATAN MATERIAL

Disusun oleh:

Asyari Darami Yunus

Teknik Mesin
Universitas Darma Persada
Jakarta
2010

KATA PENGANTAR

Untuk memenuhi buku pegangan dalam perkuliahan, terutama yang menggunakan bahasa Indonesia dalam biang teknik, maka kali ini penulis menyempatkan diri untuk ikut membuat sebuah diktat/buku yang bisa digunakan oleh mahasiswa teknik, terutama mahasiswa jurusan teknik mesin. Kali ini penulis menyiapkan diktat yang ditujukan untuk mata kuliah Mekanika Kekuatan Material.

Dalam penyusunan buku ini penulis berusaha menyesuaikan materinya dengan kurikulum di jurusan Teknik mesin Universitas Darma Persada.

Perlu diketahui bahwa buku ini belum merupakan referensi lengkap dari pelajaran Mekanika Kekuatan Material, sehingga mahasiswa perlu untuk membaca buku-buku referensi lainnya untuk melengkapi pengetahuannya tentang materi mata kuliah ini.

Akhir kata, mudah-mudahan buku ini bisa menjadi penuntunbagi mahasiswa dan memberikan manfaat sebagaimana yang diharapkan. Tak lupa penulis mengucapkan banyak-banyak terima-kasih kepada pihak-pihak yang telah banyak membantu dalam penyelesaian buku ini.

Jakarta, Oktober 2009
Ir. Asyari Darami Yunus, SE. MSc.

Daftar Isi

1 Tegangan Dan Regangan Sederhana **9**
1.1 Tegangan 9
1.2 Regangan 9
1.3 Hukum Hooke 10
1.4 Modulus Elastisitas (Modulus Young) 10
1.5 Deformasi Benda Karena Gaya Yang Bekerja 10

2 Konstanta Elastisitas **15**
2.1 Regangan Primer atau Linier 15
2.2 Regangan Sekunder atau Lateral 16
2.3 Rasio Poisson 16
2.4 Regangan Volumetrik 17
2.4.1 Regangan Volumetrik Benda Persegi Empat Yang Mendapat Gaya Aksial 18
2.4.2 Regangan Volumetrik Benda Empat Persegi Panjang Yang Mendapat Tiga Gaya Yang Saling Tegak Lurus 20
2.5 Modulus Bulk 23
2.6 Hubungan Antara Modulus Bulk dengan Modulus Young 23
2.7 Tegangan Geser 24
2.8 Tegangan Geser Prinsipal 25
2.9 Modulus Geser atau Modulus Rigiditas 26
2.10 Hubungan Antara Modulus Elastisitas dan Modulus Rigiditas 27

3 Tegangan dan Regangan Prinsipal **31**
3.1 Bidang Prinsipal 31
3.2 Tegangan Prinsipal 31
3.3 Metode Analitik Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Sebuah Benda 31
3.3.1 Tegangan Pada Bidang Miring Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang 32
3.3.2 Tegangan Pada Bidang Miring Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Arah Yang Saling Tegak Lurus 35
3.3.3 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Geser Sederhana 37

3.3.4 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang Disertai Dengan Tegangan Geser Sederhana 39
3.3.5 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Bidang Yang Saling Tegak Lurus Disertai Dengan Tegangan Geser Sederhana 43
3.4 Metode Grafik Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Sebuah Benda . 48
3.4.1 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang 49
3.4.2 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Arah Yang Saling Tegak Lurus 50
3.4.3 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Sebuah Tegangan Langsung Pada Satu Bidang Disertai Dengan Sebuah Tegangan Geser 52
3.4.4 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Dua Tegangan Langsung Pada Arah Yang Saling Tegak Lurus Disertai Dengan Sebuah Tegangan Geser 55

4 Defleksi Batang 61
4.1 Kurva Bending Batang 61
4.2 Hubungan Antara Kemiringan, Defleksi dan Jari-jari Kurva 63
4.3 Metode Untuk Kemiringan dan Defleksi Pada Penampang 64
4.4 Metode Integral Ganda Untuk kemiringan dan Defleksi 64
4.4.1 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Di Tengah 65
4.4.2 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Eksentrik 67
4.4.3 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terdistribusi Merata 72
4.4.4 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual 75

5 Defleksi Kantilever 79
5.1 Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Ujung Bebasnya 79
5.2 Kantilever Dengan Beban Terpusat Tidak Pada Ujung Bebasnya . . . 81
5.3 Kantilever Dengan Beban Terdistribusi Merata 82
5.4 Kantilever Terbebani Sebagian Dengan Beban Terdistribusi Merata . . 85
5.5 Kantilever Dibebani Dari Ujung Bebas 86
5.6 Kantilever Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual 88
5.7 Kantilever Dengan Beberapa Beban 90

6 Defleksi Dengan Metode Momen Luas 93
6.1 Luas dan Posisi Pusat Gravitasi Parabola 93
6.2 Batang Tumpuan Sederhana dengan Beban Terpusat Di Tengah 94
6.3 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Eksentrik 96
6.4 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terdistribusi Merata . . . 99
6.5 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual 101

6.6 Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Ujung Bebasnya 104
6.7 Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Sembarang Titik 105
6.8 Kantilever Dengan Beban Terdistribusi Merata 107
6.9 Kantilever Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual 108

Bab 1

Tegangan Dan Regangan Sederhana

1.1 Tegangan

Setiap material adalah elastis pada keadaan alaminya. Karena itu jika gaya luar bekerja pada benda, maka benda tersebut akan mengalami deformasi. Ketika benda tersebut mengalami deformasi, molekulnya akan membentuk tahanan terhadap deformasi. Tahanan ini per satuan luas dikenal dengan istilah tegangan. Secara matematik tegangan bisa didefinisikan sebagai gaya per satuan luas, atau:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

dimana P = beban atau gaya yang bekerja pada benda
A = Luas penampang melintang benda

Pada sistem SI, satuan tegangan adalah pascal (Pa) yang sama dengan 1 N/m^2.

1.2 Regangan

Deformasi per satuan panjang disebut dengan *regangan.* Secara matematis ditulis:

$$\varepsilon = \frac{\delta l}{l}$$

atau

$$\delta l = \varepsilon . l$$

dimana δl = Perubahan panjang benda
l = Panjang awal benda

1.3 Hukum Hooke

Berbunyi, “Jika benda dibebani dalam batas elastisnya, maka tegangan berbanding lurus dengan regangannya”. Secara matematis ditulis:

$$\frac{Tegangan}{Regangan} = E = konstan$$

1.4 Modulus Elastisitas (Modulus Young)

Tegangan berbanding lurus dengan regangan, dalam daerah elastisnya, atau:

$$\begin{aligned} \sigma &\propto \varepsilon \\ &= E \text{ x } \varepsilon \end{aligned}$$

atau

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

dimana σ = tegangan
ε = regangan, dan
E = konstanta proporsionalitas atau disebut juga modulus elastisitas atau modulus Young.

Tabel 1.1: Harga *E* (modulus elastisitas) dari berbagai material.

No.	Material	Modulus Elastisitas (*E*) dalam GPa
1.	Baja	200 – 220
2.	Besi tempa	190 – 200
3.	Besi cor	100 – 160
4.	Tembaga	90 – 110
5.	Perunggu	80 – 90
6.	Aluminium	60 – 80
7.	Timbal	10

1.5 Deformasi Benda Karena Gaya Yang Bekerja

Misalkan sebuah benda mendapat tegangan tarik.

Misalkan P = Beban atau gaya yang bekerja pada benda
l = Panjang benda
A = Luas penampang benda
σ = Tegangan yang timbul pada benda
E = Modulus Elastisitas material benda
ε = Regangan
δl = Deformasi benda

Kita tahu bahwa tegangan:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Maka regangan:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

dan deformasi:

$$\delta l = \varepsilon.l = \frac{\sigma.l}{E} = \frac{Pl}{AE}$$

Catatan:

1. Rumus di atas baik juga digunakan untuk tekanan
2. Untuk sebagian besar material, modulus elastisitas untuk kompresi sama dengan tarikan.
3. Kadang-kadang dalam perhitungan, tegangan dan regangan tarik diberi tanda positif, dan tegangan dan regangan tekan/kompresi diberi tanda negatif.

Contoh soal 1.1. Sebuah batang dari baja dengan panjang 1 m dan penampang 20 mm $\times$ 20 mm mendapat gaya tarik sebesar 40 kN. Carilah perpanjangan batang, jika modulus elastisitas material batang adalah 200 GPa.

Jawab.

Diketahui: panjang (l) = 1 m = 1 $\times 10^3$ mm
luas penampang (A) = 20 $\times$ 20 = 400 mm^2
gaya tarik (P) = 40 kN = 40 $\times 10^3$ N
Modulus elastisitas (E) = 200 GPa = 200 $\times 10^3$ N/mm^2

Perpanjangan batang:

$$\delta l = \frac{P.l}{A.E} = \frac{(40 \times 10^3) \times (1 \times 10^3)}{400 \times (200 \times 10^3)} = 0,5 \text{ mm}$$

Contoh Soal 1.2. Silinder berlobang dengan panjang 2 m mempunyai diameter luar 50 mm dan diameter dalam 30 mm. Jika silinder memikul beban sebesar 25 kN, carilah tegangan pada silinder. Cari juga deformasi yang terjadi pada silinder jika harga modulus elastisitas material silinder adalah 100 GPa.

Jawab.

Diketahui: panjang (l) = 2 m = 2 $\times 10^3$ mm
diameter luar (D) = 50 mm
diameter dalam (d) = 30 mm
beban (P) = 25 kN = 25 $\times 10^3$ N/mm^2
modulus elastisitas (E) = 100 GPa = 100 $\times 10^3$ N/mm^2

Tegangan Pada Silinder

$$A = \frac{\pi}{4} \times (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \times [(50)^2 - (30)^2] = 1257 \text{ mm}^2$$

dan tegangan pada silinder:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{25 \times 10^3}{1257} = 19,9 \text{ N/mm}^2 = 19,9 \text{ MPa}$$

Deformasi pada silinder

$$\delta l = \frac{P.l}{A.E} = \frac{(25 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)}{1257 \times (100 \times 10^3)} = 0,4 \text{ mm}$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah batang baja dengan panjang 2 m dan penampang 150 mm^2 mendapat tarikan aksial sebesar 15 kN. Carilah perpanjangan/elongasi batang. Ambil harga E = 200 GPa. (jawab: 1,0 mm)

2. Sebuah batang lurus mempunyai panjang 500 mm dan penampang 500 mm^2. Carilah besar beban kompresi dimana panjangnya berkurang 0,2 mm. Ambil E material 200 GPa. (jawab: 40 kN)

3. Sebuah batang logam paduan dengan panjang 1 mm dan penampang 200 mm^2 mendapat gaya tekan sebesar 20 kN. Jika modulus elastisitas paduan 100 GPa, carilah penurunan panjang batang. (jawab: 0,5 mm)

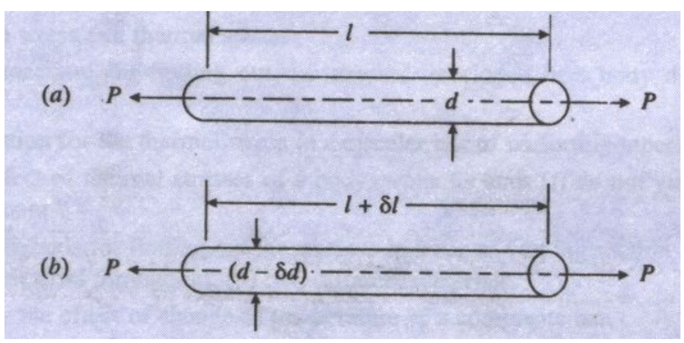
Bab 2

Konstanta Elastisitas

Dari eksperimen ditemukan bahwa regangan aksial yang terjadi pada sebuah benda selalu diikuti regangan dengan tanda yang berlawanan pada bagian lain yang tegak lurus terhadapnya. Secara umum, terdapat dua jenis regangan pada benda jika benda tersebut mengalami tegangan:

1. Regangan primer atau linier.
2. Regangan sekunder atau lateral.

2.1 Regangan Primer atau Linier



Gambar 2.1: Regangan linier dan lateral

Misalkan sebuah batang mengalami gaya tarik, seperti ditunjukkan oleh gambar 2.1(a).

Jika l = Panjang batang
d = Diameter batang
P = Gaya tarik yang bekerja pada batang
δl = Peningkatan panjang batang karena gaya tarik.

Deformasi batang per satuan panjang pada arah gaya, *yaitu*, $\delta l/l$ di kenal dengan *regangan primer* atau *linier*.

2.2 Regangan Sekunder atau Lateral

Ketika sebuah batang mengalami pertambahan panjang sebesar δl searah gaya tarik yang bekerja padanya, pada saat yang bersamaan terjadi penurunan diameter dari d ke (d - δd), seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.1(b). Dengan cara yang sama, jika batang mendapat gaya tekan, panjang batang akan menurun sebesar δl yang diikuti oleh peningkatan diameter dari d ke (d - δd).

Jadi jelas bahwa setiap tegangan langsung selalu diikuti oleh regangan pada arah tegangan dan regangan dengan tanda yang berlawanan pada arah yang tegak lurus terhadap tegangan tersebut. Regangan yang tegak lurus terhadap tegangan yang bekerja ini disebut dengan *regangan sekunder* atau *lateral*.

2.3 Rasio Poisson

Dari eksperimen ditemukan bahwa jika sebuah benda mengalami tegangan pada daerah elastisnya, regangan lateral mempunyai rasio konstan terhadap regangan linier. Secara matematik:

$$\frac{\text{regangan lateral}}{\text{regangan linier}} = \text{konstan}$$

Konstanta ini dikenal dengan **Rasio Poisson**, dan dilambangkan dengan $1/m$ atau μ. Secara matematik:

$$\text{regangan lateral} = \frac{1}{m}.\varepsilon = \mu.\varepsilon$$

Tabel 2.1: Harga rasio Poisson dari berbagai material.

No.	Material	Rasio poisson, μ
1.	Baja	0,25 – 0,33
2.	Besi tuang	0,23 – 0,27
3.	Tembaga	0,31 – 0,34
4.	Perunggu	0,32 – 0,42
5.	Aluminium	0,32 – 0,36
6.	Beton	0,08 – 0,18
7.	Karet	0,45 – 0,50

Contoh soal 2.1. Sebuah batang yang terbuat dari baja dengan panjang 2 m, lebar 40 mm dan tebal 20 mm mendapat tarikan searah aksial sebesar 160 kN pada arah panjangnya. Carilah perubahan panjang, lebar dan ketebalan batang. Diketahui E = 200 GPa dan rasio Poisson = 0,3.

Jawab.

Diketahui: l = 2 m = 2×10^3 mm
b = 40 mm
t = 20 mm
P = 160 kN = 160×10^3 N
E = 200 GPa = 200×10^3 N/mm^2
rasio Poisson, 1/m = 0,3

Perubahan panjang:

$$\delta l = \frac{Pl}{AE} = \frac{(160 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)}{(40 \times 20) \times (200 \times 10^3)} = 2 \text{ mm}$$

Perubahan lebar:

$$\varepsilon = \frac{\delta l}{l} = \frac{2}{(2 \times 10^3)} = 0,001$$

dan regangan lateral:

$$= \frac{1}{m} \times \varepsilon = 0,3 \times 0.001 = 0,0003$$

Jadi perubahan lebar:

$$\delta b = b \times \text{ regangan lateral} = 40 \times 0,0003 = 0,012 \text{ mm}$$

Perubahan ketebalan:

$$\delta t = t \times \text{ regangan lateral} = 20 \times 0,0003 = 0,006 \text{ mm}$$

2.4 Regangan Volumetrik

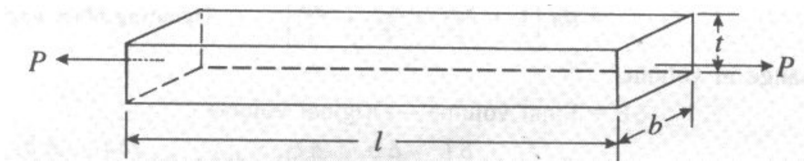
Jika sebuah benda mendapatkan gaya, maka benda tersebut akan mengalami perubahan dimensi. Perubahan dimensi sebuah benda akan menyebabkan perubahan volumenya. Rasio perubahan volume terhadap volume awal disebut dengan *regangan volumetrik*. Secara matematik, regangan volumetrik:

$$\varepsilon_V = \frac{\delta V}{V}$$

dimana: δV = Perubahan volume
V = Volume awal.

Walaupun ada berbagai cara gaya bekerja pada benda, kondisi berikut perlu untuk mengetahui regangan volumetrik pada suatu benda:

1. Benda persegi empat mendapat sebuah gaya aksial.
2. Benda persegi empat mendapat tiga gaya yang saling tegak lurus.



Gambar 2.2: Regangan Volumetrik.

2.4.1 Regangan Volumetrik Benda Persegi Empat Yang Mendapat Gaya Aksial

Misalkan sebuah batang dengan penampang persegi panjang, mendapat gaya tarik aksial, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.2.

Misalkan P = Beban atau gaya tarik yang bekerja pada benda
l = Panjang benda
b = Lebar batang
t = Tebal batang
E = Modulus Elastisitas
$1/$m = Rasio Poisson

Kita tahu bahwa perubahan panjang:

$$\delta l = \frac{Pl}{AE} = \frac{Pl}{btE} \tag{2.1}$$

dan tegangan linier:

$$\sigma = \frac{\text{Gaya}}{\text{Luas}} = \frac{P}{b.t}$$

sehingga:

$$\text{regangan linier} = \frac{\text{tegangan}}{E} = \frac{P}{btE}$$

dan regangan lateral:

$$= \frac{1}{m}\,\text{X regangan linier} = \frac{1}{m}\,\text{X}\,\frac{P}{btE}$$

maka perubahan ketebalan:

$$\delta t = t\,\text{X}\,\frac{1}{m}\,\text{X}\,\frac{P}{btE} = \frac{P}{mbE}$$

dan perubahan lebar:

$$\delta b = b\,\text{X}\,\frac{1}{m}\,\text{X}\,\frac{P}{btE} = \frac{P}{mtE}$$

Sebagai hasil dari gaya tarik ini, misal panjang akhir:

$$= l + \delta l$$

lebar akhir (tanda negatif karena kompresi):

$$= b - \delta b$$

dan panjang akhir (tanda negatif karena kompresi):

$$= t - \delta t$$

Kita tahu bahwa volume awal benda:

$$V = l.b.t$$

dan volume akhir:

$$\begin{aligned} V &= (l + \delta l)(b - \delta b)(t - \delta t) \\ &= lbt\left(1 + \frac{\delta l}{l}\right)\left(1 - \frac{\delta b}{b}\right)\left(1 - \frac{\delta t}{t}\right) \\ &= lbt\left[1 + \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta t}{t} - \left(\frac{\delta l}{l} \text{ X } \frac{\delta b}{b}\right) - \left(\frac{\delta l}{l} \text{ X } \frac{\delta t}{t}\right) + \left(\frac{\delta l}{l} \text{ X } \frac{\delta b}{b} \text{ X } \frac{\delta t}{t}\right)\right] \end{aligned}$$

Dengan mengabaikan variabel-variabel yang nilainya kecil, maka:

$$V = lbt\left(1 + \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta t}{t}\right)$$

Perubahan volume:

$$\begin{aligned} \delta V &= \text{Volume akhir} - \text{Volume awal} \\ &= lbt\left[1 + \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta t}{t}\right] - lbt \\ &= lbt\left[\frac{\delta l}{l} - \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta t}{t}\right] \\ &= lbt\left[\frac{\frac{Pl}{btE}}{l} - \frac{\frac{P}{mtE}}{b} - \frac{\frac{P}{mbE}}{tl}\right] = lbt\left[\frac{P}{btE} - \frac{P}{mbtE} - \frac{P}{mbtE}\right] \\ &= V \text{ X } \frac{P}{btE}\left(1 - \frac{2}{m}\right) \end{aligned}$$

dan regangan volumetrik:

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{V} &= \frac{V \text{ X } \frac{P}{btE}\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{V} = \frac{P}{btE}\left(1 - \frac{2}{m}\right) \\ &= \varepsilon\left(1 - \frac{2}{m}\right) \end{aligned}$$

Catatan: Rumus di atas berlaku juga untuk gaya tekan.

Contoh soal 2.2. Sebuah batang yang terbuat dari baja dengan panjang 2 m, lebar 20 mm dan tebal 15 mm mendapat beban tarik sebesar 30 kN. Carilah peningkatan volume, jika rasio Poisson = 0,25 dan modulus Young = 200 GPa.

Jawab.

Diketahui: l = 2 m = 2×10^3 mm
b = 20 mm
t = 15 mm
P = 30 kN = 30×10^3 N
rasio Poisson, 1/m = 0,25
modulus Young, E = 200 GPa = 200×10^3 N/mm^2

Volume awal batang:

$$V = l.b.t = (2 \times 10^3) \times 20 \times 15 = 600 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

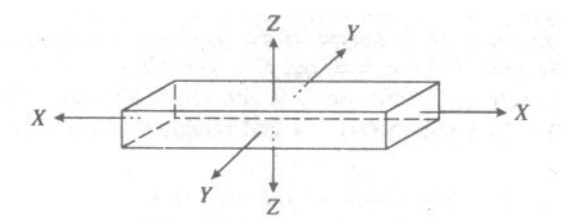
$$\frac{\delta V}{V} = \frac{P}{btE}\left(1 - \frac{2}{m}\right) = \frac{30 \times 10^3}{20 \times 15 \times (200 \times 10^3)}\left(1 - \frac{2}{4}\right) = 0,00025$$

Jadi peningkatan volume:

$$\delta V = 0,00025 \times V = 0,00025 \times (600 \times 10^3) = 150 \text{ mm}^3$$

2.4.2 Regangan Volumetrik Benda Empat Persegi Panjang Yang Mendapat Tiga Gaya Yang Saling Tegak Lurus

Misalkan sebuah benda persegi empat mendapat tegangan langsung pada ketiga sumbunya yang saling tegak lurus, seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 2.3.



Gambar 2.3: Regangan Volumetrik.

Misalkan σ_x = Tegangan pada arah *x-x*
σ_y = Tegangan pada arah *y-y*
σ_z = Tegangan pada arah *z-z*
E = Modulus Young

Regangan pada arah *X-X* karena tegangan σ_x,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

dengan cara yang sama,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{dan} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Regangan pada ketiga arah bisa dicari dengan prinsip superposisi, yaitu dengan menambahkan secara aljabar regangan di setiap arah karena setiap tegangan individu. Untuk ketiga tegangan tarik yang ditunjukkan oleh Gambar 2.3 (dengan memakai tanda positif sebagai regangan tarik dan negatif sebagai regangan tekan), regangan resultan pada arah *x-x*:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{mE} - \frac{\sigma_z}{mE} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_z}{E}\right)$$

dengan cara yang sama

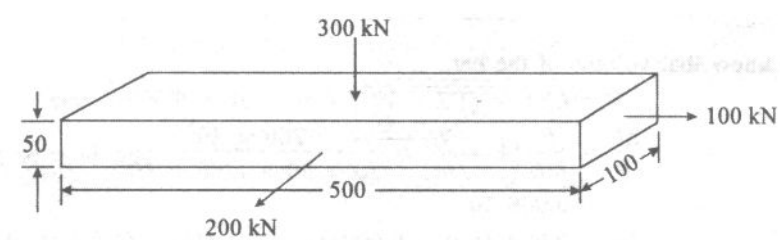
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_z}{mE} = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_z}{E}\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{mE} = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{E}\right)$$

Regangan volumetrik bisa dicari dengan:

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Contoh soal 2.3. Sebuah batang dengan panjang 500 mm dan penampang 100 mm $\times$ 50 mm menerima gaya-gaya seperti gambar 2.4. Berapakah perubahan volume batang? Ambil modulus elastisitas untuk material batang 200 GPa dan rasio Poisson 0,25.



Gambar 2.4:

Jawab

Diketahui: l = 500 mm
b = 100 mm
t = 50 mm
Gaya pada arah x = P_X = 100 kN = 100×10^3 N (tarik)

Gaya pada arah $y = P_y$ = 200 kN = 200 × 10^3 N (tarik)
Gaya pada arah $z = P_z$ = 300 kN = 300 × 10^3 N (tekan)
E = 200 GPa = 200 × 10^3 N/mm^2
rasio Poisson = 1/m = 0,25 atau m = 4

Volume awal batang:

$$V = l \times b \times t = 500 \times 100 \times 50 = 2,5 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

dan tegangan pada arah *x-x*:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_x} = \frac{100 \times 10^3}{100 \times 50} = 20 \text{ N/mm}^2 \text{ (tarik)}$$

dengan cara yang sama:

$$\sigma_y = \frac{P_y}{A_y} = \frac{200 \times 10^3}{500 \times 50} = 8 \text{ N/mm}^2 \text{ (tarik)}$$

dan

$$\sigma_z = \frac{P_z}{A_z} = \frac{300 \times 10^3}{500 \times 100} = 6 \text{ N/mm}^2 \text{ (tekan)}$$

Kita juga tahu bahwa regangan resultan pada arah *x-x,* dengan mempertimbangkan tarikan adalah positif dan kompresi adalah negatif adalah:

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{mE} + \frac{\sigma_z}{mE} = +\frac{20}{E} - \frac{8}{4E} + \frac{6}{4E} = \frac{16,5}{E}$$

dengan cara yang sama:

$$\varepsilon_y = +\frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} + \frac{\sigma_z}{mE} = +\frac{8}{E} - \frac{20}{4E} + \frac{6}{4E} = \frac{4,5}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{mE} = -\frac{6}{E} - \frac{20}{4E} - \frac{8}{4E} = \frac{13}{E}$$

regangan volumetrik:

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\frac{\delta V}{2,5 \times 10^6} = \frac{16,5}{E} + \frac{4,5}{E} - \frac{13}{E} = \frac{8}{E} = \frac{8}{200 \times 10^3} = 0,04 \times 10^{-3}$$

$$\delta V = (0,04 \times 10^{-3}) \times (2,5 \times 10^6) = 100 \text{ mm}^3$$

2.5 Modulus Bulk

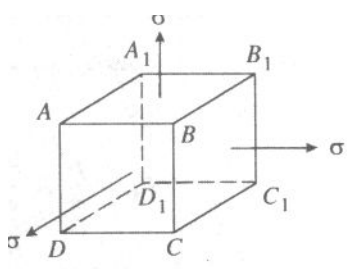
Jika sebuah benda mendapat tiga tegangan yang saling tegak lurus, dengan besaran yang sama, rasio tegangan langsung terhadap regangan volumetrik disebut sebagai modulus bulk, dilambangkan dengan *K*. Secara matematik:

$$K = \frac{\text{Tegangan Langsung}}{\text{Regangan Volumetrik}} = \frac{\sigma}{\frac{\delta V}{V}}$$

2.6 Hubungan Antara Modulus Bulk dengan Modulus Young

Misalkan sebuah kubus *ABCD* $A_1B_1C_1D_1$ seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.5. Katakan kubus mendapat tiga tegangan tarik yang saling tegak lurus dengan besaran yang sama.

Ambil σ = Tegangan pada permukaan
l = Panjang kubus
E = Modulus Young untuk material kubus



Gambar 2.5: Kubus *ABCD* $A_1B_1C_1D_1$

Misalkan deformasi pada satu sisi kubus (katakan *AB*) karena tiga tegangan tarik. Kita tahu bahwa sisi ini mengalami regangan-regangan berikut:

1. Tegangan tarik sebesar $\frac{\sigma}{E}$ karena tegangan pada permukaan BB_1 CC_1 dan AA_1 DD_1.

2. Regangan lateral tekan sebesar $\frac{1}{m}$ x $\frac{\sigma}{E}$ karena tegangan pada permukaan AA_1 BB_1 dan DD_1 CC_1.

3. Regangan lateral tekan sebesar $\frac{1}{m}$ x $\frac{\sigma}{E}$ karena tegangan pada permukaan *ABCD* dan $A_1B_1C_1D_1$.

Sehingga, regangan tarik netto yang dialami oleh sisi *AB* karena tegangan-tegangan ini:

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\sigma}{El} - \left(\frac{1}{m} \times \frac{\sigma}{E}\right) - \left(\frac{1}{m} \times \frac{\sigma}{E}\right) = \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right) \tag{2.2}$$

Volume awal kubus: $V = l^3$ dan turunannya terhadap *l* adalah $\frac{\delta V}{V} = 3l^2$ atau:

$$\delta V = 3l^2.\delta l = 3l^3 \times \frac{\delta l}{l}$$

Substitusikan harga $\frac{\delta l}{l}$ dari persamaan 2.2:

$$\delta V = 3l^3 \times \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

atau

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{3l^3}{l^3} \times \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right) = \frac{3\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

sehingga

$$\frac{\sigma}{\frac{\delta V}{V}} = \frac{E}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{m}\right)} = \frac{E}{3}\frac{1}{\left(\frac{m-2}{m}\right)}$$

atau

$$K = \frac{mE}{3(m-2)}$$

Contoh soal 2.4. Jika harga modulus elastisitas dan rasio poisson sebuah paduan masing-masing adalah 150 GPa dan 0,25, carilah harga modulus bulk paduan tersebut.

Jawab

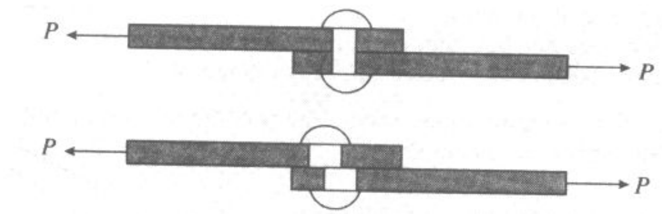
Diketahui: *E* = 150 GP = 150×10^3 N/mm^2
rasio Poisson, 1/*m* = 0,25 atau *m* = 4

Modulus bulk paduan:

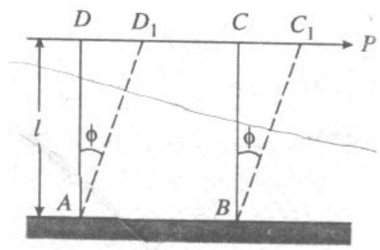
$$\begin{aligned} K &= \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{4 \times (150 \times 10^3)}{3(4-2)} = 100 \times 10^3 \text{ N/mm}^2 \\ &= 100 \text{ GPa} \end{aligned}$$

2.7 Tegangan Geser

Ketika suatu penampang mendapat dua gaya yang sama besar dan berlawanan arah, dan bekerja secara tangensial pada penampang tersebut, akibatnya benda tersebut cendrung robek melalui penampang tersebut seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.6, tegangan yang ditimbulkan disebut *tegangan geser*. Regangannya disebut *regangan geser*.



Gambar 2.6: Tegangan geser pada keling.



Gambar 2.7: Regangan geser.

Misalkan sebuah kubus dengan panjang *l* mempunyai tumpuan tetap pada permukaan dasar *AB*. Misalkan sebuah gaya *P* diberikan pada permukaan *DC*, tangensial terhadap permukaan *AB*. Karena gaya, misalkan kubus berubah dari *ABCE* ke ABC_1D_1 melalui sudut ϕ seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.7.

$$\begin{aligned} \text{Regangan Geser} &= \frac{\text{Deformasi}}{\text{Panjang awal}} \\ &= \frac{CC_1}{l} = \phi \end{aligned}$$

dan tegangan geser:

$$\tau = \frac{P}{AB}$$

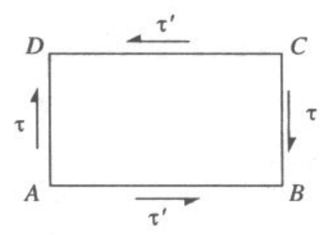
2.8 Tegangan Geser Prinsipal

Tegangan geser prinsipal adalah tegangan geser pada penampang sebuah bidang, dan selalu diikuti oleh tegangan geser penyeimbang (*balancing shear stress*) pada penampang bidang dan normal terhadapnya.

Bukti

Misalkan sebuah blok segiempat *ABCD* mendapat tegangan geser τ pada permukaan *AD* dan *CB* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.8. Misalkan ketebalan satu satuan. Maka gaya yang bekerja pada permukaan *AD* dan *CB*:

$$P = \tau.AD = \tau.CB$$



Gambar 2.8: Tegangan Geser Prinsipal

Dapat dilihat bahwa gaya-gaya ini membentuk sebuah kopel, dimana harga momennya adalah $\tau.AB$ x AB yaitu gaya X jarak. Jika balok dalam keadaan setimbang, maka harus ada kopel penyeimbang yang besar momennya harus sama dengan besar momen ini. Misalkan tegangan geser τ' terdapat pada permukaan *AB* dan *CD* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.8. Maka gaya-gaya yang bekerja pada permukaan *AB* dan *CD*:

$$P = \tau'.AB = \tau'.CD$$

Kita bisa melihat bahwa gaya-gaya ini juga membentuk kopel yang besar momennya sama dengan $\tau.AB$ x AB. Dengan menyamakan kedua momen ini maka:

$$\tau.AD \text{ x } AB = \tau'.AD \text{ x } AB$$

atau:

$$\tau = \tau'$$

Sebagai akibat dari kedua kopel, diagonal *BD* balok akan mendapat gaya tarik, sedangkan diagonal *AC* mendapat gaya tekan.

Tegangan τ disebut regangan komplementer.

2.9 Modulus Geser atau Modulus Rigiditas

Secara eksperimen diperoleh bahwa di dalam batas elastik, tegangan geser proporsional (berbanding lurus) terhadap regangan geser. Secara matematik:

$$\begin{aligned} \tau &\propto \phi \\ &= C \text{ x } \phi \end{aligned}$$

atau

$$\frac{\tau}{\phi} = C \text{ (atau } G \text{ atau } N\text{)}$$

dimana: τ = tegangan geser
ϕ = regangan geser
C = konstanta, dikenal sebagai modulus geser atau modulus rigiditas

Tabel 2.2: Harga modulus Rigiditas berbagai material.

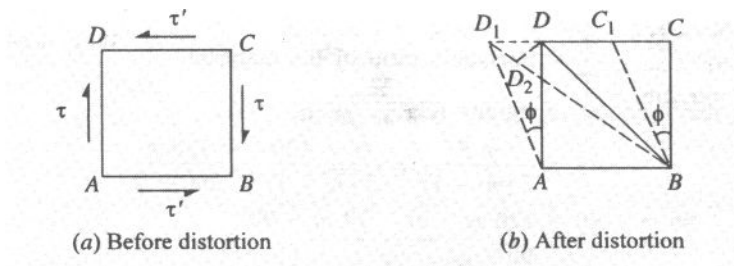
No.	Material	Modulus Rigiditas (C) dalam GPa atau kN/mm^2
1	Baja	80 – 100
2	Besi tempa	80 – 90
3	Besi cor	40 – 50
4	Tembaga	30 – 50
5	Kuningan	30 – 60
6	Timbal	10

2.10 Hubungan Antara Modulus Elastisitas dan Modulus Rigiditas

Misalkan sebuah kubus dengan panjang *l* mendapat tegangan geser τ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.9(a). Terlihat bahwa karena tegangan-tegangan tersebut, kubus mengalami distorsi, seperti diagonal *BD* akan bertambah panjang dan diagonal *AC* akan bertambah pendek. Misalkan tegangan geser τ akan menimbulkan regangan ϕ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.9(b). Terlihat bahwa diagonal *BD* akan mengalami distorsi menjadi *BD'*.

$$\begin{aligned} \text{regangan } BD &= \frac{BD_1 - BD}{BD} \\ &= \frac{D_1 D_2}{BD} = \frac{DD_1 \cos 45^0}{AD\sqrt{2}} = \frac{DD_1}{2AD} = \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

Kita lihat bahwa regangan linier diagonal *BD* adalah setengah dari regangan geser dan berupa tarik. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa diagonal *AC* adalah juga setengah dari regangan geser, tetapi berupa tekan. Regangan linier diagonal *BD*:



Gambar 2.9:

$$= \frac{\phi}{2} = \frac{\tau}{2C} \tag{2.3}$$

dimana: τ = regangan geser
C = Modulus rigiditas

Misalkan tegangan geser ini bekerja pada sisi *AB, CD, CB* dan *AD*. Kita tahu bahwa akibat dari tegangan ini akan berupa tegangan tarik pada diagonal *BD* dan tegangan tekan pada diagonal *AC*. Maka regangan tarik pada diagonal *BD* karena tegangan tarik pada diagonal *BD*:

$$= \frac{\tau}{E} \tag{2.4}$$

dan regangan tarik pada diagonal *BD* karena tegangan tekan pada diagonal *AC*:

$$= \frac{1}{m} \times \frac{\tau}{E} \tag{2.5}$$

Efek kombinasi dari kedua tegangan di atas pada diagonal *BD*

$$= \frac{\tau}{E} + \frac{1}{m} \times \frac{\tau}{E} = \frac{\tau}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{\tau}{E}\left(\frac{m+1}{m}\right) \tag{2.6}$$

Dengan menyamakan persamaan 2.3 dan 2.6:

$$\frac{\tau}{2C} = \frac{\tau}{E}\left(\frac{m+1}{m}\right) \text{ atau } C = \frac{mE}{2(m+1)}$$

Contoh soal 2.5. Sebuah spesimen paduan mempunyai modulus elastisitas 120 GPa dan modulus rigiditas 45 GPa. Carilah rasio Poisson material tersebut.

Jawab.

Diketahui: *E* = 120 GPa
C = 45 GPa

Modulus rigiditas:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{mE}{2(m+1)} \\
45 &= \frac{m \times 120}{2(m+1)} = \frac{120m}{2m+2} \\
90m + 90 &= 120m \\
m &= \frac{90}{30} = 3 \\
1/m &= 1/3
\end{aligned}$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah batang baja dengan panjang 1,5 m dan diameter 20 mm mendapat tarikan aksial sebesar 100 kN. Carilah perubahan panjang dan diameter batang, jika E = 200 GPa dan $1/m$ = 0,32

2. Carilah perubahan panjang, lebar dan tebal dari sebuah batang baja yang panjangnya 4 m, lebar 30 mm dan tebal 20 mm, jika mendapat tarikan aksial sebesar 120 kN pada arah panjangnya. Ambil E = 200 GPa dan rasio Poisson 0,3.

3. Sebuah pelat baja mempunyai modulus elastisitas 200 GPa dan rasio Poisson 0,3. Berapakah harga modulus bulk material tersebut?

4. Pada sebuah eksperimen, sebuah batang paduan dengan panjang 1 m dan penampang 20 mm $\times$ 20 mm diuji untuk menambah panjang sampai 1 mm ketika diberikan beban tarik aksial sebesar 6,4 kN. Jika modulus bulk batang 133 GPa, carilah harga rasio Poisson.

Bab 3

Tegangan dan Regangan Prinsipal

3.1 Bidang Prinsipal

Pada sebuah titik pada suatu benda terdapat 3 bidang yang saling tegak lurus satu sama lain dan hanya mendapat tegangan langsung, tidak terdapat tegangan geser. Dari ketiga tegangan langsung ini salah satunya akan mempunyai harga yang paling besar, satu mempunyai harga minimum, dan satu lagi mempunyai harga diantaranya. Ketiga bidang yang tidak mempunyai tegangan geser ini dikenal dengan *Bidang prinsipal*.

3.2 Tegangan Prinsipal

Besarnya tegangan langsung pada bidang prinsipal disebut dengan *tegangan prinsipal*. Penentuan bidang prinsipal, dan kemudian tegangan prinsipal merupakan faktor penting dalam desain berbagai struktur komponen mesin.

Pada pembahasan selanjutnya akan dibahas penentuan tegangan pada penampang miring sebuah benda yang mengalami regangan dengan dua metode:

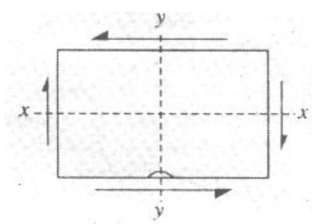
1. Metode analitik, dan
2. Metode grafik.

3.3 Metode Analitik Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Sebuah Benda

Konvensi tanda yang digunakan untuk metode analitik:

1. Semua tegangan dan regangan tarik dianggap positif dan semua tegangan dan regangan tekan dianggap negatif.

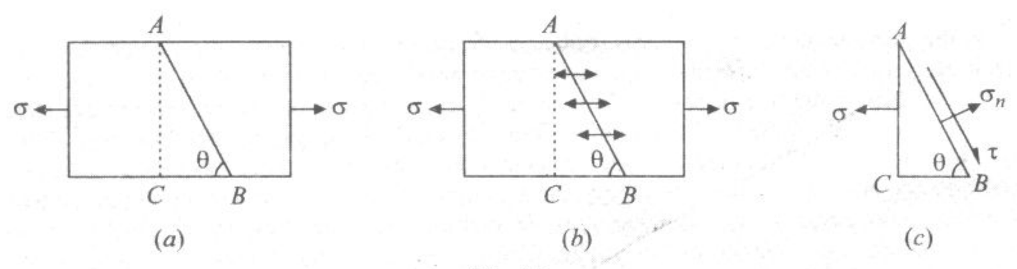
2. Tegangan geser yang akan memutar benda dalam arah searah jarum jam dianggap positif, sedangkan berlawanan dengan jarum jam dianggap negatif.



Gambar 3.1:

Pada benda yang ditunjukkan oleh gambar 3.1, tegangan geser pada sisi vertikal (sumbu x-x) diambil positif, sedangkan tegangan geser pada sisi horisontal (sumbu y-y) diambil negatif.

3.3.1 Tegangan Pada Bidang Miring Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang



Gambar 3.2:

Misalkan sebuah benda empat persegi panjang yang mempunyai luas penampang seragam dengan ketebalan satu satuan mendapat tegangan tarik langsung pada sumbu x-x seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.2(a). Misalkan sebuah penampang miring *AB* pada sumbu x-x,

jika σ = tegangan tarik pada penampang *AC*
θ = sudut antara penampang *AB* dengan sumbu x-x

Pertama-tama, elemen *ABC* berada pada kondisi setimbang dimana diagram *free body* ditunjukkan oleh gambar 3.2(b) dan (c). Kita tahu bahwa gaya horisontal pada *AC*:

$$P = \sigma.AC\ (\rightarrow)$$

Gaya tegak lurus atau gaya normal pada bidang *AB*:

$$P_n = P \sin\theta = \sigma.AC \sin\theta$$

Gaya tangensial pada penampang *AB*:

$$P_t = P \cos\theta = \sigma.AC \cos\theta$$

Tegangan normal pada penampang *AB*:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\sigma.AC\sin\theta}{AB} = \frac{\sigma.AC\sin\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} = \sigma\sin^2\theta \\ &= \frac{\sigma}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}\cos 2\theta \end{aligned}$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada penampang *AB*:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\sigma.AC\cos\theta}{AB} = \frac{\sigma.AC\cos\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} = \sigma\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{\sigma}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

Dari persamaan tegangan normal, nilainya akan maksimal jika $\sin^2\theta = 1$ atau $\sin\theta = 1$ atau $\theta = 90^0$. Dengan kata lain, permukaan *AC* akan mendapat tegangan langsung maksimum. Dengan cara yang sama, tegangan geser pada bidang *AB* akan maksimum jika $\sin 2\theta = 1$ atau $2\theta = 90^0$ atau 270^0. Dengan kata lain tegangan geser akan maksimum pada sudut 45^0 dan 135^0. Tegangan geser maksimum pada $\theta = 45^0$:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}\sin 90^0 = \frac{\sigma}{2}.1 = \frac{\sigma}{2}$$

dan tegangan geser maksimum pada $\theta = 135^0$:

$$\tau_{max} = -\frac{\sigma}{2}\sin 270 = -\frac{\sigma}{2}.(-1) = \frac{\sigma}{2}$$

Tegangan resultan diperoleh dari persamaan:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}$$

Bidang dengan tegangan normal maksimum dan minimum bisa diperoleh dengan menyamakan persamaan tegangan geser dengan nol.

$$\sigma\sin\theta\cos\theta = 0$$

Contoh soal 3.1. Sebuah batang dari kayu mendapat tegangan tarik sebesar 5 MPa. Berapakah harga tegangan normal dan geser pada penampang yang membuat sudut sebesar 25^0 dengan arah tegangan tarik.

Jawab.

Diketahui: σ = 5 MPa
$\theta = 25^0$

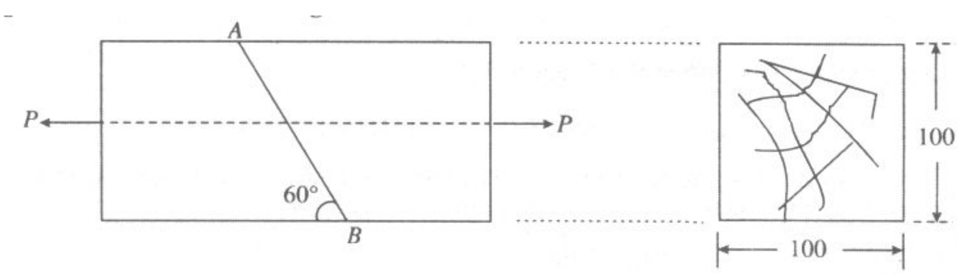
Tegangan normal pada penampang:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}\cos 2\theta = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\cos(2 \times 25^0) \text{ MPa} \\ &= 2,5 - 2,5\cos 50^0 = 2,5 - (2,5 \times 0,6428) \text{ MPa} \\ &= 2,5 - 1,607 = 0,89 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Tegangan geser pada penampang:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\sigma}{2}\sin 2\theta = \frac{\sigma}{2}\sin(2 \times 25^0) = 2,5\sin 50 \\ &= 2,5 \times 0,766 = 1,915 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Contoh soal 3.2. Dua potongan kayu ukuran penampang 100×100 mm disambung pada daerah garis *AB* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.3. Carilah gaya maksimum (*P*) yang bisa diberikan jika tegangan geser pada sambungan *AB* adalah 1,3 MPa.



Gambar 3.3:

Jawab.

Diketahui: Penampang = 100 mm X 100 mm
$\theta = 60^0$
σ = 1,3 MPa = 1,3 N/mm^2

$$A = 100 \times 100 = 10.000 \text{ mm}^2$$

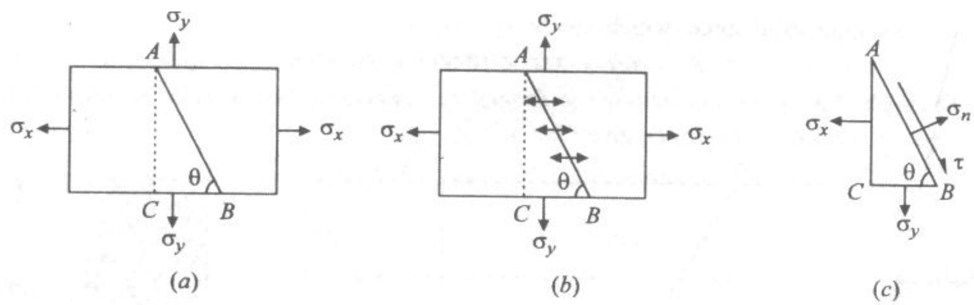
Tegangan geser:

$$
\begin{aligned}
1,3 &= \frac{\sigma}{2}\sin 2\theta = \frac{\sigma}{2}\sin(2\times 60^0) = \frac{\sigma}{2}\sin 120^0 = \frac{\sigma}{2}\times 0,866 \\
&= 0,433\sigma \\
\sigma &= \frac{1,3}{0,433 = 3,0}\ \text{N/mm}^2
\end{aligned}
$$

Gaya aksial maksimum yang bisa diberikan:

$$P = \sigma.A = 3,0 \times 10000 = 30.000\ \text{N} = 30\ \text{kN}$$

3.3.2 Tegangan Pada Bidang Miring Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Arah Yang Saling Tegak Lurus



Gambar 3.4:

Misalkan sebuah benda empat persegi panjang yang mempunyai luas penampang seragam dengan ketebalan satu satuan mendapat tegangan tarik langsung pada dua arah yang saling tegak lurus pada sumbu x-x dan sumbu y-y seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.4. Misalkan sebuah penampang miring *AB* pada sumbu x-x,

Jika: σ_x = Tegangan tarik pada sumbu x-x (disebut juga tegangan tarik major)
σ_y = Tegangan tarik pada sumbu y-y (disebut juga tegangan tarik minor)
θ = Sudut bidang miring *AB* dengan sumbu x-x

Pertama-tama, elemen *ABC* berada pada kondisi setimbang. Kita tahu bahwa gaya horisontal pada *AC*:

$$P_x = \sigma_x.AC\ (\rightarrow)$$

dan gaya vertikal pada *BC*:

$$P_y = \sigma_y.BC\ (\downarrow)$$

Gaya tegak lurus atau gaya normal pada bidang *AB*:

$$P_n = P_x \sin\theta + P_y \cos\theta = \sigma_x.AC \sin\theta + \sigma_y \cos\theta$$

Gaya tangensial pada penampang *AB*:

$$P_t = P_x \cos\theta - P_y \sin\theta = \sigma_x.AC \cos\theta - \sigma_y BC \sin\theta$$

Tegangan normal pada penampang *AB*:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\sigma_x.AC \sin\theta + \sigma_y.BC \cos\theta}{AB} \\
&= \frac{\sigma_x.AC \sin\theta + \sigma_y.BC \cos\theta}{AB} = \frac{\sigma_x.AC \sin\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} + \frac{\sigma_y.BC \cos\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} \\
&= \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta = \frac{\sigma_x}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\theta) \\
&= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\theta + \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y}{2}\cos 2\theta \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta
\end{aligned}$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada penampang *AB*:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\sigma_x.AC \cos\theta - \sigma_y.BC \sin\theta}{AB} \\
&= \frac{\sigma_x.AC \cos\theta}{AB} - \frac{\sigma_y.BC \sin\theta}{AB} = \frac{\sigma_x.AC \cos\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} - \frac{\sigma_y.BC \sin\theta}{\frac{AC}{\cos\theta}} \\
&= \sigma_x \sin\theta \cos\theta - \sigma_y \sin\theta \cos\theta \\
&= (\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta
\end{aligned}$$

Tegangan geser akan maksimum jika sin 2θ = 1 atau 2θ = 90^0 atau θ = 45^0. Maka tegangan geser maksimum:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

Tegangan resultan diperoleh dari persamaan:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}$$

Contoh soal 3.3. Sebuah titik pada material yang mengalami deformasi mendapat dua tegangan tarik yang saling tegak lurus sebesar 200 MPa dan 100 MPa. Carilah besarnya tegangan geser, tegangan normal dan tegangan resultan pada sebuah bidang dengan kemiringan 30^0 dengan sumbu tegangan tarik mayor.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 200$ MPa
$\sigma_y = 100$ MPa
$\theta = 30^0$

Tegangan normal pada bidang miring:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta \\ &= \frac{200+100}{2} - \frac{200-100}{2}\cos(2\times 30^0) \\ &= 150 - (50 \times 0,5) = 125 \text{ MPa} \end{aligned}$$

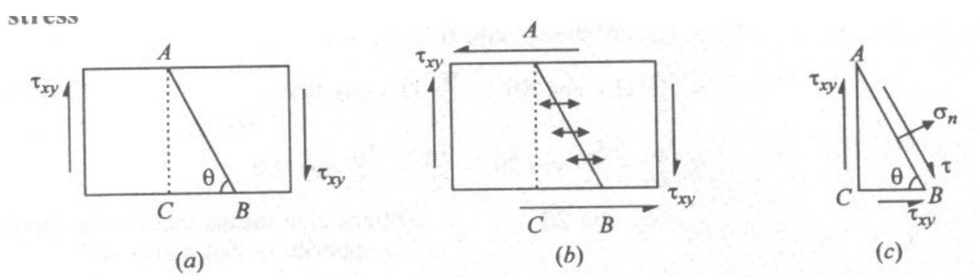
Tegangan geser pada bidang miring:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta = \frac{200-100}{2}\sin(2\times 30^0) \\ &= 50\sin 60^0 = 50 \times 0,866 = 43,3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Tegangan resultan pada bidang miring:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2} = \sqrt{(125)^2 + (43,3)^2} = 132,3 \text{ MPa}$$

3.3.3 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Geser Sederhana



Gambar 3.5:

Misalkan sebuah benda mendapat tegangan geser positif epanjang sumbu x-x seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.5(a). Bidang AB membentuk sudut dengan sumbu x-x dan kita akan mencari tegangan-tegangan seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.5(b).

Jika: τ_{xy} = tegangan geser positif sepanjang sumbu x-x
θ = sudut yang dibentuk bidang AB dengan sumbu x-x.

Gaya vertikal yang bekerja pada permukaan *AC*:

$$P_1 = \tau_{xy}.AC\ (\downarrow)$$

dan gaya horisontal pada permukaan *BC*:

$$P_2 = \tau_{xy}.BC\ (\rightarrow)$$

Gaya tegak lurus bidang *AB* atau gaya normal:

$$P_n = P_1 \cos\theta + P_2 \sin\theta = \tau_{xy}.AC \cos\theta + \tau_{xy}.BC \sin\theta$$

Gaya tangensial pada bidang *AB*:

$$P_t = P_1 \sin\theta - P_2 \cos\theta = \tau_{xy}.AC \sin\theta - \tau_{xy}.BC \cos\theta$$

Tegangan normal pada bidang *AB*:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\tau_{xy}.AC \cos\theta + \tau_{xy}.BC \sin\theta}{AB} \\
&= \frac{\tau_{xy}.AC \cos\theta}{AB} + \frac{\tau_{xy}.BC \sin\theta}{AB} \\
&= \frac{\tau_{xy}.AC \cos\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} + \frac{\tau_{xy}.BC \sin\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} \\
&= \tau_{xy}.\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}.\sin\theta\cos\theta \\
&= 2\tau_{xy}.\sin\theta\cos\theta = \tau_{xy}.\sin 2\theta
\end{aligned}$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada bidang *AB*:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\tau_{xy}.AC \sin\theta - \tau_{xy}.BC \cos\theta}{AB} \\
&= \frac{\tau_{xy}.AC \sin\theta}{AB} - \frac{\tau_{xy}.BC \cos\theta}{AB} \\
&= \frac{\tau_{xy}.AC \sin\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} - \frac{\tau_{xy}.BC \cos\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} \\
&= \tau_{xy}.\sin^2\theta - \tau_{xy}.\cos^2\theta \\
&= \frac{\tau_{xy}}{2}(1 - \cos 2\theta) - \frac{\tau_{xy}}{2}(1 + \cos 2\theta) \\
&= \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2}\cos 2\theta - \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2}\cos 2\theta \\
&= -\tau_{xy}\cos 2\theta
\end{aligned}$$

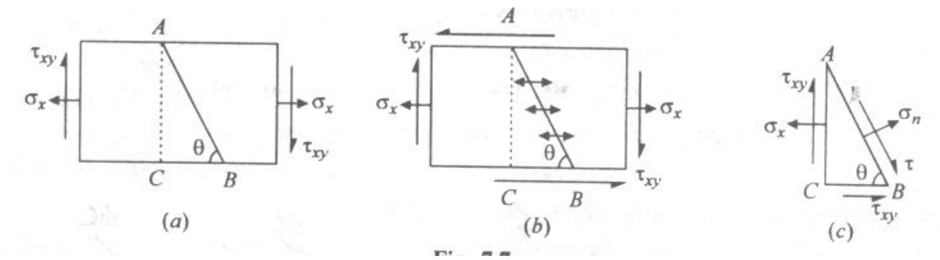
tanda negatif menunjukkan bahwa tegangan mempunyai arah yang berlawanan pada bidang *AC*.

Tegangan normal maksimum dan minimum bisa dicari dengan menyamakan persamaan tegangan geser dengan nol:

$$-\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Persamaan di atas terpenuhi jika 2θ = 90^0 atau 270^0 atau dengan kata lain θ = 45^0 atau 135^0.

3.3.4 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang Disertai Dengan Tegangan Geser Sederhana



Gambar 3.6:

Misalkan sebuah benda segi empat mendapat tegangan tarik pada sumbu x-x diikuti dengan tegangan geser positif sepanjang sumbu x-x seperti ditunjukkan oleh gambar 3.6(*a*).

Jika: σ_x = Tegangan tarik pada sumbu x-x
τ_{xy} = tegangan geser positif sepanjang sumbu x-x
θ = sudut yang dibentuk bidang *AB* dengan sumbu x-x.

Gaya horisontal yang bekerja pada permukaan *AC*:

$$P_x = \sigma_x.AC\ (\rightarrow)$$

dan gaya vertikal pada permukaan *AC*:

$$P_y = \tau_{xy}.AC\ (\downarrow)$$

Gaya horisontal yang bekerja pada permukaan *BC*:

$$P = \tau_{xy}.BC\ (\rightarrow)$$

Gaya tegak lurus bidang *AB* atau gaya normal:

$$\begin{aligned} P_n &= P_x \sin\theta - P_y \cos\theta - P \sin\theta \\ &= \sigma_x.AC \sin\theta - \tau_{xy}.AC \cos\theta - \tau_{xy}.BC \sin\theta \end{aligned}$$

Gaya tangensial pada bidang *AB*:

$$\begin{aligned} P_t &= P_x \cos\theta + P_y \sin\theta - P\cos\theta \\ &= \sigma_x.AC\sin\theta + \tau_{xy}.AC\cos\theta - \tau_{xy}.BC\sin\theta \end{aligned}$$

Tegangan normal pada bidang *AB*:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\sigma_x.AC\sin\theta - \tau_{xy}.AC\cos\theta - \tau_{xy}.BC\cos\theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x.AC\sin\theta}{AB} - \frac{\tau_{xy}.AC\cos\theta}{AB} - \frac{\tau_{xy}.BC\cos\theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x.AC\sin\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} - \frac{\tau_{xy}.AC\cos\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} - \frac{\tau_{xy}.BC\cos\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} \\ &= \sigma_x.\sin^2\theta - \tau_{xy}.\sin\theta\cos\theta - \tau_{xy}.\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2}(1-\cos 2\theta) - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \end{aligned} \tag{3.1}$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada bidang *AB*:

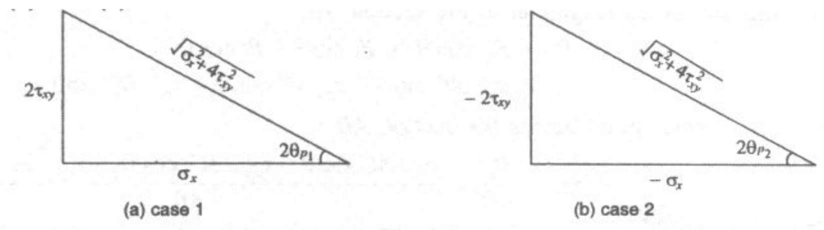
$$\begin{aligned} \tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\sigma_x.AC\cos\theta + \tau_{xy}.AC\sin\theta - \tau_{xy}.BC\cos\theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x.AC\cos\theta}{AB} + \frac{\tau_{xy}.AC\sin\theta}{AB} - \frac{\tau_{xy}.BC\cos\theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x.AC\cos\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} + \frac{\tau_{xy}.AC\sin\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} - \frac{\tau_{xy}.BC\cos\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} \\ &= \sigma_x.\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}.\sin^2\theta - \tau_{xy}.\cos^2\theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta + \frac{\tau_{xy}}{2}(1-\cos 2\theta) - \frac{\tau_{xy}}{2}(1+\cos 2\theta) \\ &= \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta + \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2}\cos 2\theta - \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2}\cos 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{3.2}$$

Bidang yang mempunyai tegangan normal maksimal dan minimal bisa dicari dengan menyamakan persamaan tegangan geser dengan nol.

Misalkan θ_p adalah harga sudut dimana tegangan geser adalah nol. Maka:

$$\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta_p - \tau_{xy}\cos 2\theta_p = 0$$

$$\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta_p = \tau_{xy}\cos 2\theta_p$$



Gambar 3.7:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}$$

Dari persamaan di atas, kita peroleh bahwa 2 kondisi berikut akan memenuhi persamaan tesebut seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.7(a) dan (b). Untuk kasus 1, kita peroleh:

$$\sin 2\theta_{p1} = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \text{ dan } \cos 2\theta_{p1} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

dengan cara yang sama untuk kasus 2:

$$\sin 2\theta_{p2} = \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \text{ dan } \cos 2\theta_{p2} = \frac{-\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Sekarang harga tegangan prinsipal bisa dicari dengan mensubstitusikan harga-harga $2\theta_{p1}$ dan $2\theta_{p2}$ di atas ke persamaan 3.1. Maka tegangan prinsipal maksimum:

$$\begin{aligned}
\sigma_{p1} &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\
&= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \times \frac{-\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \times \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
&= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \frac{2\tau_{xy}^2}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
&= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}\frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \\
&= \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
\end{aligned}$$

dan tegangan prinsipal minimum:

$$\begin{aligned}
\sigma_{p2} &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \times \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
&= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} - \frac{2\tau_{xy}^2}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
&= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
\end{aligned}$$

Contoh soal 3.4. Sebuah elemen bidang pada sebuah benda mendapat tegangan tarik sebesar 100 MPa disertai dengan tegangan geser sebesar 25 MPa. Carilah (i) tegangan normal dan tegangan geser sebuah bidang yang membentuk sudut sebesar 20^0 dengan tegangan tarik dan, (ii) tegangan prinsipal maksimum pada bidang.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 100$ MPa
$\tau_{xy} = 25$ MPa
$\theta = 20^0$

(i) Tegangan normal dan tegangan geser:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\
&= \frac{100}{2} - \frac{100}{2}\cos(2 \times 20^0) - 25\sin(2\theta \times 20^0) \\
&= 50 - 50\cos 40^0 - 25\sin 40^0 \\
&= 50 - (50 \times 0,766) - (25 \times 0,6428) \\
&= 50 - 38,3 - 16,7 = 4,37 \text{ MPa}
\end{aligned}$$

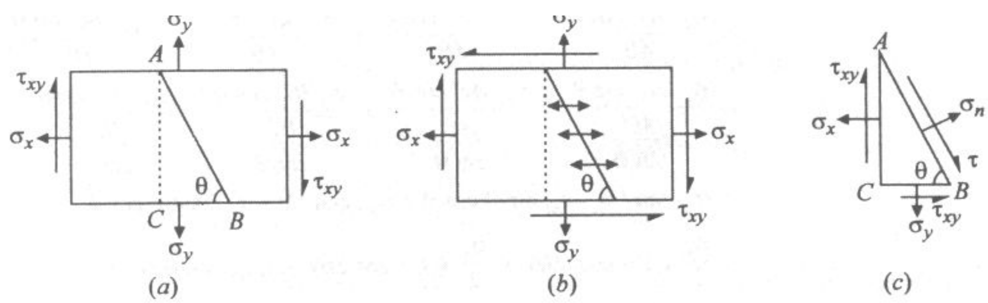
$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \\
&= \frac{100}{2}\sin(2 \times 20^0) - 25\cos(2 \times 20^0) \\
&= 50\sin 40^0 - 25\cos 40^0 \\
&= (50 \times 0,6428) - (25 \times 0,766) \\
&= 32,14 - 19,15 = 12,99 \text{ MPa}
\end{aligned}$$

(ii) Tegangan prinsipal maksimum pada bidang:

$$\sigma_{p1} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{100}{2} + \sqrt{\left(\frac{100}{2}\right)^2 + (25)^2}$$
$$= 105,9 \text{ MPa}$$

3.3.5 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Bidang Yang Saling Tegak Lurus Disertai Dengan Tegangan Geser Sederhana



Gambar 3.8:

Misalkan sebuah benda persegi empat mendapat tegangan tarik pada sumbu x-x dan sumbu y-y dan disertai dengan tegangan geser positif pada seoanjang sumbu x-x, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.8(*b*).

Jika: $\sigma_x =$ tegangan tarik pada sumbu x-x
$\sigma_y =$ tegangan tarik pada sumbu y-y
$\tau_{xy} =$ tegangan geser positif pada sumbu x-x
$\theta =$ sudut bidang *AB* dengan sumbu y-y

Gaya horisontal yang bekerja pada permukaan *AC*:

$$P_1 = \sigma_x.AC\ (\rightarrow)$$

dan gaya vertikal pada permukaan *AC*:

$$P_2 = \tau_{xy}.AC\ (\downarrow)$$

gaya vertikal pada permukaan *BC:*

$$P_3 = \sigma_x.BC\ (\downarrow)$$

Gaya horisontal yang bekerja pada permukaan *BC*:

$$P_4 = \tau_{xy}.BC\ (\rightarrow)$$

Gaya tegak lurus bidang *AB* atau gaya normal:

$$\begin{aligned}
P_n &= P_1 \sin\theta - P_2 \cos\theta + P_3 \cos\theta - P_4 \sin\theta \\
&= \sigma_x.AC \sin\theta - \tau_{xy}.AC \cos\theta + \sigma_y BC \cos\theta - \tau_{xy}.BC \sin\theta
\end{aligned}$$

Gaya tangensial pada bidang *AB*:

$$\begin{aligned}
P_t &= P_1 \cos\theta + P_2 \sin\theta - P_3 \sin\theta - P_4 \cos\theta \\
&= \sigma_x.AC \cos\theta + \tau_{xy}.AC \sin\theta - \sigma_y.BC \sin\theta - \tau_{xy}.BC \cos\theta
\end{aligned}$$

Tegangan normal pada bidang *AB*:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\sigma_x.AC \sin\theta - \tau_{xy}.AC \cos\theta + \sigma_y BC \cos\theta - \tau_{xy}.BC \sin\theta}{AB} \\
&= \frac{\sigma_x.AC \sin\theta}{AB} - \frac{\tau_{xy}.AC \cos\theta}{AB} + \frac{\sigma_y.BC \cos\theta}{AB} - \frac{\tau_{xy}.BC \sin\theta}{AB} \\
&= \frac{\sigma_x.AC \sin\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} - \frac{\tau_{xy}.AC \cos\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} + \frac{\sigma_y.BC \cos\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} - \frac{\tau_{xy}.BC \sin\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} \\
&= \sigma_x.\sin^2\theta - \tau_{xy}.\sin\theta\cos\theta + \sigma_y.\cos^2\theta - \tau_{xy}.\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{\sigma_x}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2}(1 - \cos 2\theta) - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\theta + \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada bidang *AB*:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\sigma_x.AC \cos\theta + \tau_{xy}.AC \sin\theta - \sigma_y.BC \sin\theta - \tau_{xy}.BC \cos\theta}{AB} \\
&= \frac{\sigma_x.AC \cos\theta}{AB} + \frac{\tau_{xy}.AC \sin\theta}{AB} - \frac{\sigma_y.BC \sin\theta}{AB} - \frac{\tau_{xy}.BC \cos\theta}{AB} \\
&= \frac{\sigma_x.AC \cos\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} + \frac{\tau_{xy}.AC \sin\theta}{\frac{AC}{\sin\theta}} - \frac{\sigma_x.AC \sin\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} - \frac{\tau_{xy}.BC \cos\theta}{\frac{BC}{\cos\theta}} \\
&= \sigma_x.\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}.\sin^2\theta - \sigma_y.\sin\theta\cos\theta - \tau_{xy}.\cos^2\theta \\
&= (\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \frac{\tau_{xy}}{2}(1 - \cos 2\theta) - \frac{\tau_{xy}}{2}(1 + \cos 2\theta) \\
&= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2}\cos 2\theta - \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2}\cos 2\theta \\
&= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

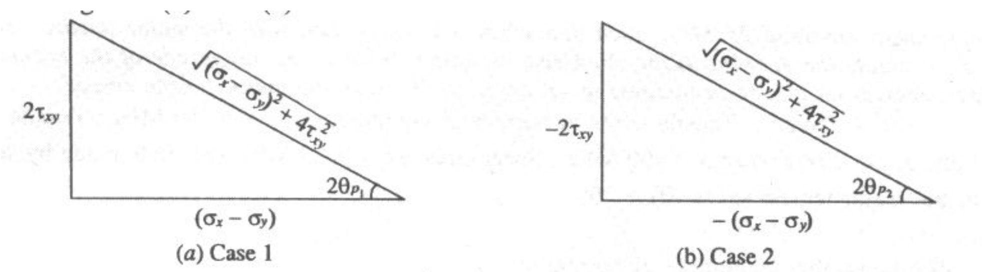
Bidang yang mempunyai tegangan normal maksimal dan minimal bisa dicari dengan menyamakan persamaan tegangan geser dengan nol.

Misalkan θ_p adalah harga sudut dimana tegangan geser adalah nol. Maka:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_p - \tau_{xy} \cos 2\theta_p = 0$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_p = \tau_{xy} \cos 2\theta_p$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Gambar 3.9:

Dari persamaan di atas, kita peroleh bahwa 2 kondisi berikut akan memenuhi persamaan tesebut seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.9(a) dan (b). Untuk kasus 1, kita peroleh:

$$\sin 2\theta_{p1} = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \text{ dan } \cos 2\theta_{p1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

dengan cara yang sama untuk kasus 2:

$$\sin 2\theta_{p2} = \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \text{ dan } \cos 2\theta_{p2} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Sekarang harga tegangan prinsipal bisa dicari dengan mensubstitusikan harga-harga $2\theta_{p1}$ dan $2\theta_{p2}$ di atas ke persamaan 3.3. Maka tegangan prinsipal maksimum:

$$\begin{aligned}
\sigma_{p1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \times \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
\end{aligned}
$$

dan tegangan prinsipal minimum:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{p2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \frac{-(\sigma_x + \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \times \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 2\tau_{xy}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
\end{aligned}
$$

Contoh soal 3.5. Sebuah titik mendapat tegangan tarik sebesar 250 MPa pada arah horisontal dan tegangan tarik sebesar 100 MPa pada arah vertikal. Titik tersebut juga mendapat tegangan geser sebesar 25 MPa, yang apabila dikaitkan dengan tegangan tarik mayor, akan merotasi elemen searah jarum jam. Berapakah besar tegangan normal dan geser pada penampang yang membentuk sudut sebesar 20^0 dengan tegangan tarik mayor.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 250$ MPa
$\sigma_y = 100$ MPa
$\tau_{xy} = 25$ MPa
$\theta = 20^0$

Besar Tegangan Normal:

$$
\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\
&= \frac{250 + 100}{2} - \frac{250 - 100}{2}\cos(2 \times 20^0) - 25\sin(2 \times 20^0) \\
&= 175 - (75 \times 0,766) - (25 \times 0,6428) \\
&= 175 - 57,5 - 16,07 = 101,48 \text{ MPa}
\end{aligned}
$$

Besar Tegangan Geser:

$$
\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{250-100}{2}\sin(2\times 20^0) - 25\cos(2\times 20^0) \\
&= 75\sin(40^0) - 25\cos(40^0) \\
&= (75\times 0,6428) - (25\times 0,766) \\
&= 48,21 - 19,15 = 29,06 \text{ MPa}
\end{aligned}
$$

Contoh soal 3.6. Sebuah elemen bidang pada sebuah boiler menerima tegangan tarik sebesar 400 MPa pada satu bidang dan 150 MPa pada bidang lainnya yang tegak lurus terhadap bidang pertama. Setiap tegangan tersebut disertai dengan tegangan geser sebesar 100 MPa dimana jika dikaitkan dengan tegangan tarik minor akan cendrung merotasikan elemen berlawanan arah jarum jam. Carilah:

1. Tegangan prinsipal dan arahnya.
2. Tegangan geser maksimum dan arahnya pada bidang dimana tegangan ini bekerja.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 400$ MPa
$\sigma_y = 150$ MPa
$\tau_{xy} = -100$ MPa

1. Tegangan prinsipal dan arahnya:
Tegangan prinsipal maksimum:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{max} &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\
&= \frac{400+150}{2} + \sqrt{\left(\frac{400-150}{2}\right)^2 + (-100)^2} \\
&= 275 + 160,1 = 435,1 \text{ MPa}
\end{aligned}
$$

Tegangan prinsipal minimum:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{min} &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\
&= \frac{400+150}{2} - \sqrt{\left(\frac{400-150}{2}\right)^2 + (-100)^2} \\
&= 275 - 160,1 = 114,9 \text{ MPa}
\end{aligned}
$$

Misalkan θ_p = sudut bidang prinsipal dengan sumbu x-x

$$\begin{aligned}
\tan 2\theta_p &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 100}{400 - 150} = 0,8 \\
2\theta_p &= 38,66^0 \\
\theta_p &= 19,33^0 \text{ atau } 109,33^0
\end{aligned}$$

2. Tegangan geser maksimum dan arahnya:

$$\begin{aligned}
\tau_{max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{400 - 150}{2}\right)^2 + (-100)^2} \\
&= 160,1 \text{ MPa}
\end{aligned}$$

Misalkan θ_s = sudut bidang tegangan geser maksimum dengan sumbu x-x.

$$\begin{aligned}
\tan 2\theta_s &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{400 - 150}{2 \times 100} = 1,25 \\
2\theta_s &= 51,34^0 \\
\theta_s &= 25,67^0 \text{ atau } 115,67^0
\end{aligned}$$

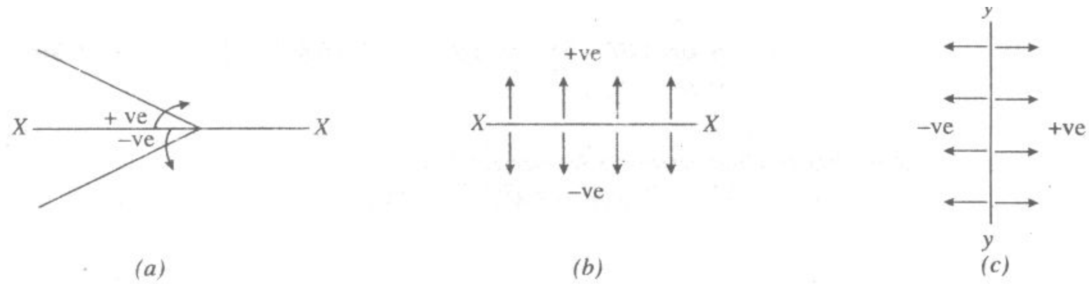
3.4 Metode Grafik Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Sebuah Benda

Konvensi tanda yang digunakan dalam metode grafik:

1. Sudut diambil dengan referensi sumbu x-x. Semua sudut yang mempunyai arah berlawanan jarum jam dianggap negatif, dan searah jarum jam dianggap positif, seperti ditunjukkan oleh gambar 3.10(a). Harga sudut positif jika ditarik ke arah searah jarum jam.

2. Pengukuran yang dilakukan di atas sumbu x-x dan di kanan sumbu y-y diambil positif, sedangkan di bawah sumbu x-x dan di kiri sumbu y-y di ambil negatif, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.10(b) dan (c).

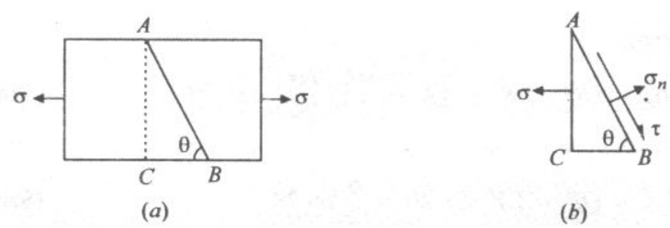
3. Kadang-kadang diperoleh sedikit perbedaan dari hasil metode analitik dengan metode grafik. Harga yang diperoleh dari metode grafik dianggap benar jika selisih satu angka desimal dengan hasil metode analitik, contoh: 7,55 (analitik) = 7,6 (metode grafik).



Gambar 3.10:

3.4.1 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang

Misalkan sebuah benda empat persegi panjang mendapat tegangan tarik langsung pada sumbu x-x seperti ditunjukkan oleh gambar 3.11(a) dan (b).



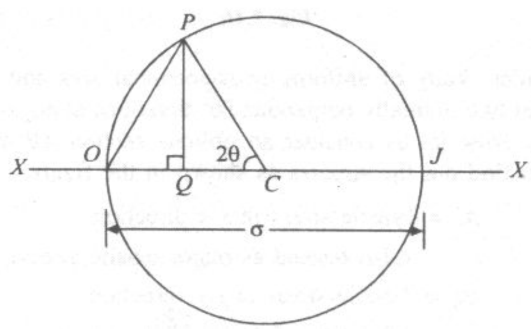
Gambar 3.11:

Jika σ = tegangan tarik pada penampang AC
θ = sudut antara penampang AB dengan sumbu x-x

Untuk mencari tegangan pada bidang miring AB, kita gunakan lingkaran Mohr tegangan seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.12 , dengan prosedur sebagai berikut:

1. pertama-tama, ambil sembarang titik O, dan melalui titik O tersebut gambar garis XOX.
2. Dengan menggunakan skala tertentu, buat potongan garis OJ sesuai besarnya tegangan tarik (σ) ke kanan (sebab tegangan adalah tarik). Bagi dua potongan garis OJ dengan pusatnya ada pada titik C.
3. Dengan C sebagai pusat dan jari jari CO atau CJ buatlah sebuah lingkaran. Lingkaran ini disebut *Lingkaran Mohr untuk Tegangan*.

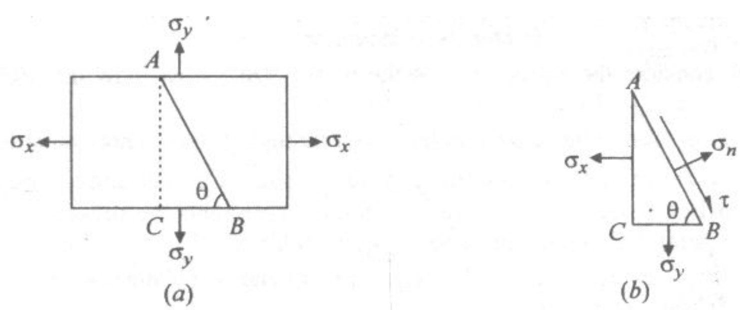
4. Melalui titik *C* gambarlah garis *CP* dengan sudut sebesar 2θ dengan *CO* dan arah searah jarum jam, memotong lingkaran pada titik *P*.
5. Melalui *P*, gambar garis *PQ* yang tegak lurus terhadap *OX*. Tarik garis *OP*.
6. Panjang garis *OQ, QP* dan *OP* masing-masing adalah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan, sesuai dengan skala yang digunakan. Sudut *POJ* merupakan sudut kemiringan (θ).



Gambar 3.12:

3.4.2 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Arah Yang Saling Tegak Lurus

Misalkan sebuah persegi panjang mendapat tegangan tarik langsung pada dua arah yang saling tegak lurus yaitu pada sumbu x-x dan sumbu y-y seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.13(*a*) dan (*b*).

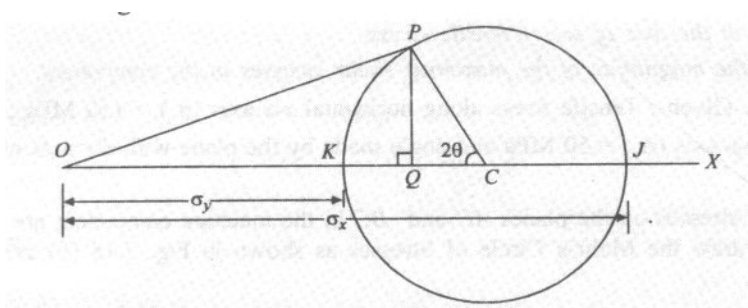


Gambar 3.13:

Diketahui: σ_x = tegangan tarik pada arah sumbu x-x (atau tegangan tarik major)
σ_y = tegangan tarik pada arah sumbu y-y (atau tegangan tarik minor)
θ = sudut bidang miring *AB* dengan sumbu x-x searah jarum jam

Prosedur menggambar diagram Mohr (perhatikan gambar 3.14):

1. Pertama-tama, ambil sembarang titik O dan gambarlah garis horisontal *OX*.
2. Dengan menggunakan skala tertentu, buat potongan garis *OJ* sesuai besarnya tegangan tarik (σ_x) dan *OK* sesuai besarnya tegangan tarik (σ_y) ke kanan (sebab tegangan adalah tarik). Bagi dua sama besar potongan garis *JK* dengan pusatnya ada pada titik *C*.
3. Dengan *C* sebagai pusat dan jari jari *CJ* atau *CK* buatlah sebuah lingkaran. Lingkaran ini disebut *Lingkaran Mohr untuk Tegangan*.
4. Melalui titik *C* gambarlah garis *CP* dengan sudut sebesar 2θ dengan *CK* dan arah searah jarum jam, memotong lingkaran pada titik *P*.
5. Melalui *P*, gambar garis *PQ* yang tegak lurus terhadap *OX*. Tarik garis *OP*.
6. Panjang garis *OQ, QP* dan *OP* masing-masing adalah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan, sesuai dengan skala yang digunakan. Sudut *POC* merupakan sudut kemiringan (θ).



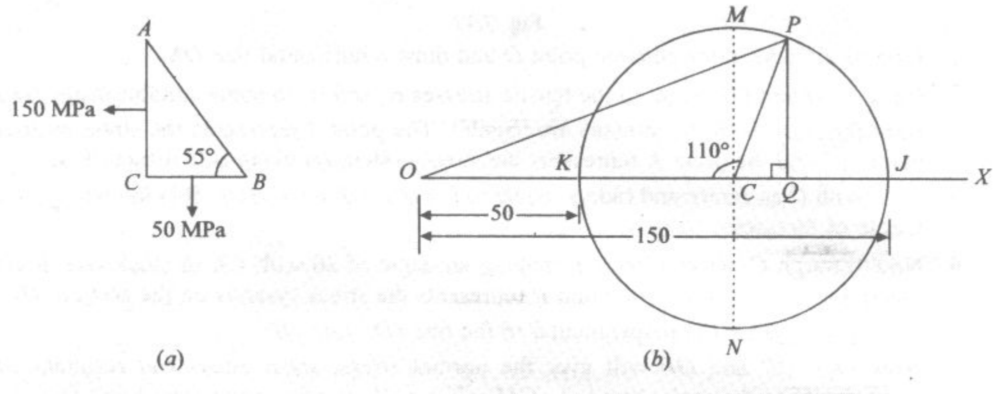
Gambar 3.14:

Contoh soal 3.7. Tegangan pada sebuah titik pada sebuah komponen mesin adalah 150 MPa dan 50 MPa dan kedua-duanya adalah tarik. Carilah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan pada sebuah bidang yang membentuk sudut sebesar 55^0 dengan sumbu tegangan tarik mayor.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 150$ MPa
$\sigma_y = 50$ MPa
$\theta = 55^0$

Tegangan yang diketahui pada bidang *AC* dan *BC* pada komponen mesin ditunjukkan oleh gambar 3.15(a).



Gambar 3.15:

Sekarang gambarlah lingkaran tegangan Mohr seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.15(b) dan diuraikan sebagai berikut:

1. Pertama-tama, ambillah sembarang titik *O* dan buatlah garis horisontal *OX*.

2. Buat potongan garis *OJ* dan *OK* yang masing-masing besarnya sama dengan σ_x dan σ_y sesuai dengan skala tertentu ke kanan. Bagi dua garis *KJ* dengan pusatnya pada *C*.

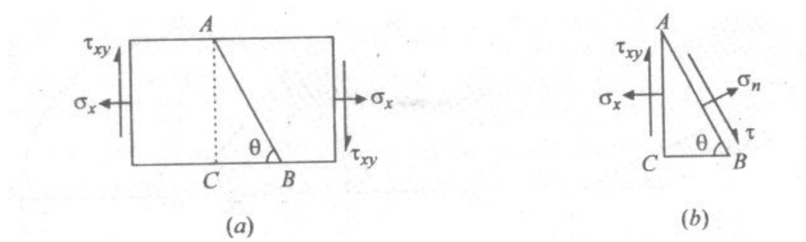
3. Dengan *C* sebagai pusat dan jari-jari *CJ* atau *CK*, gambarlah lingkaran tegangan Mohr.

4. Melalui *C* gambarlah dua garis *CM* dan *CN* yang tegak lurus terhadap garis *OX* dan memotong lingkaran pada *M* dan *N*. Melalui *C* gambar juga garis *CP* yang membentuk sudut $2 \times 55^0 = 110^0$ dengan *CK* pada arah searah jarum jam dan memotong lingkaran pada titik *P*.

5. Melalui *P*, gambarlah *PQ* yang tegak lurus terhadap garis *OX*. Buat garis *PO*. Dengan pengukuran, kita memperoleh tegangan normal (σ_n) = *OQ* = 117 MPa. Tegangan geser (τ) = *QP* = 47,0 MPa; tegangan resultan (σ_R) = *OP* = 126,2 MPa dan tegangan geser maksimum (τ_{max}) = *CM* = ± 50 MPa.

3.4.3 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Sebuah Tegangan Langsung Pada Satu Bidang Disertai Dengan Sebuah Tegangan Geser

Misalkan sebuah persegi panjang mendapat tegangan tarik langsung pada dua arah yang saling tegak lurus yaitu pada sumbu x-x dan sumbu y-y seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.16(a) dan (b).



Gambar 3.16:

Diketahui: σ_x = tegangan tarik pada arah sumbu x-x
τ_{xy} = tegangan geser positif pada arah sumbu x-x
θ = sudut bidang miring *AB* dengan sumbu x-x searah jarum jam

Prosedur menggambar diagram Mohr (perhatikan gambar 3.17):

1. Pertama-tama, ambil sembarang titik O dan gambarlah garis horisontal *XOX*.

2. Dengan menggunakan skala tertentu, buat potongan garis *OJ* sesuai besarnya tegangan tarik (σ_x).

3. Buat garis tegak lurus pada *J* di atas garis *X-X* (sebab τ_{xy} positif pada sumbu x-x) dan buat potongan garis *JD* yang besarnya sesuai dengan tegangan geser τ_{xy}dengan skala tertentu. Dengan cara yang sama buat garis tegak lurus pada titik *O* di bawah garis x-x (karena τ_{xy} negatif pada sumbu y-y*)* dan buat potongan garis *OE* yang besarnya sama dengan tegangan geser τ_{xy}. Tarik garis *DE* dan bagi dua pada *C*.

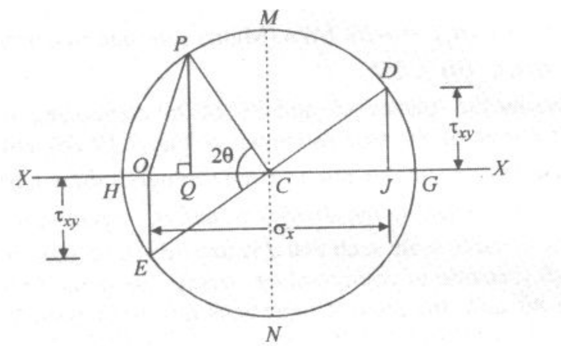
4. Dengan *C* sebagai pusat dan jari jari *CD* atau *CE* buatlah sebuah lingkaran. Lingkaran ini disebut *Lingkaran Mohr untuk Tegangan*.

5. Melalui titik *C* gambarlah garis *CP* dengan sudut sebesar 2θ dengan *CE* dan arah searah jarum jam, memotong lingkaran pada titik *P*.

6. Melalui *P*, gambar garis *PQ* yang tegak lurus terhadap *OX*. Tarik garis *OP*.

7. Panjang garis *OQ, QP* dan *OP* masing-masing adalah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan, sesuai dengan skala yang digunakan. Sudut *POC* merupakan sudut kemiringan (θ).

Contoh soal 3.8. Sebuah elemen bidang pada sebuah benda mendapat tegangan tarik sebesar 100 MPa dan disertai dengan tegangan geser searah jarum jam sebesar 25 MPa. Carilah (i) tegangan normal dan geser pada bidang yang membentuk sudut sebesar 20^0 dengan tegangan tarik; dan (ii) tegangan geser maksimum pada bidang.

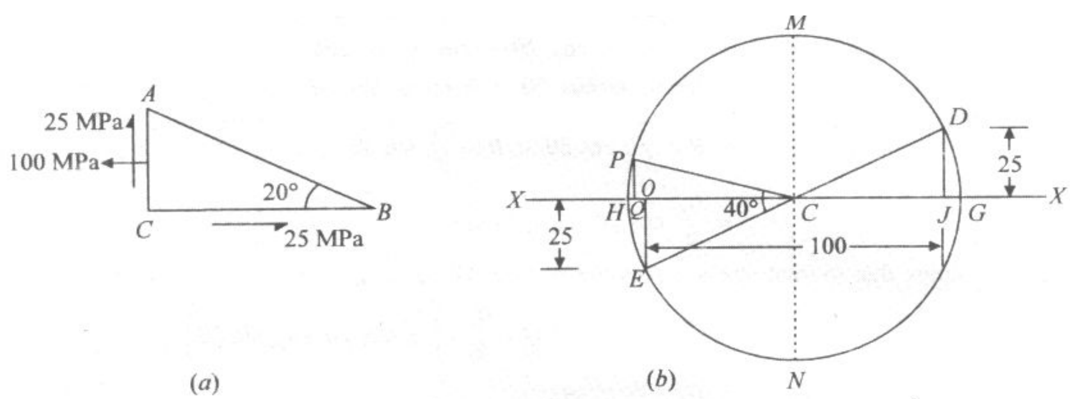


Gambar 3.17:

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 100$ MPa
$\tau_{xy} = 25$ MPa
$\theta = 20^0$

Tegangan-tegangan pada elemen dan tegangan geser pada bidang *BC* ditunjukkan oleh gambar 3.18(a).



Gambar 3.18:

Sekarang gambarlah lingkaran tegangan Mohr seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.18(b) dan dijelaskan sebagai berikut:

1. Pertama-tama, ambillah sembarang titik *O* dan buatlah garis horisontal *XOX*.
2. Buat potongan garis *OJ* yang besarnya sama dengan tegangan tarik σ_x (yaitu 100 MPa) sesuai dengan skala tertentu ke kanan.

3. Sekarang buat garis tegak lurus *J* di atas garis *X-X* dan buat potongan garis *JD* yang sama besar dan positif dengan tegangan geser pada bidang *BC* (yaitu 25 MPa) sesuai dengan skala. Dengan cara yang sama buat garis tegak lurus *O* ke bawah garis *X-X* dan buat garis *OE* yang besarnya sama dan negatif dengan tegangan geser bidang *BC* (yaitu 25 MPa) sesuai skala. Buat garis *DE* dan bagi dua di titik *C*.

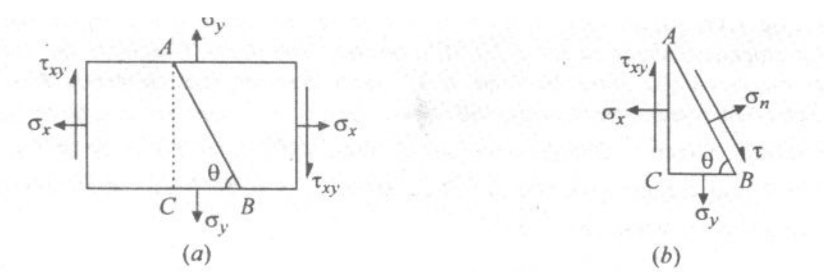
4. Dengan *C* sebagai pusat dan jari-jari *CD* atau *CE*, gambarlah lingkaran tegangan Mohr.

5. Melalui *C* gambarlah dua garis *CM* dan *CN* yang tegak lurus terhadap garis *OX* dan memotong lingkaran pada *M* dan *N*. Melalui *C* gambar juga garis *CP* yang membentuk sudut $2 \times 20^0 = 40^0$ dengan *CE* pada arah searah jarum jam dan memotong lingkaran pada titik *P*.

6. Melalui *P*, gambarlah *PQ* yang tegak lurus terhadap garis *OX*. Buat garis *PO*. Dengan pengukuran, kita memperoleh tegangan normal (σ_n) = *OQ* = 4,4 MPa (tekan). Tegangan geser (τ) = *QP* = 13,0 MPa dan tegangan geser maksimum (τ_{max}) = *CM* = $55,9$ MPa.

3.4.4 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Dua Tegangan Langsung Pada Arah Yang Saling Tegak Lurus Disertai Dengan Sebuah Tegangan Geser

Misalkan sebuah persegi panjang mendapat tegangan tarik langsung pada dua arah yang saling tegak lurus yaitu pada sumbu x-x dan sumbu y-y dan diikuti oleg sebuah tegangan geser positif (searah jarum jam) pada sumbu x-x, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.19(*a*) dan (*b*).

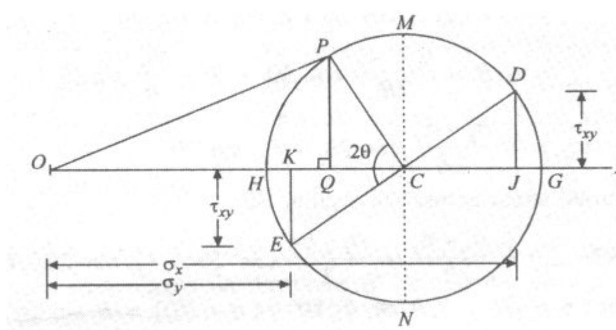


Gambar 3.19:

Diketahui: σ_x = tegangan tarik pada arah sumbu x-x
σ_y = tegangan tarik pada arah sumbu y-y
τ_{xy} = tegangan geser positif pada arah sumbu x-x
θ = sudut bidang miring *AB* dengan sumbu x-x searah jarum jam

Prosedur menggambar diagram Mohr (perhatikan gambar 3.20):

1. Pertama-tama, ambil sembarang titik O dan gambarlah garis horisontal *OX*.
2. Dengan menggunakan skala tertentu, buat potongan garis *OJ* dan *OK* masing-masing sesuai besarnya tegangan tarik (σ_x) dan (σ_y) ke kanan (karena kedua tegangan adalah tarik).
3. Buat garis tegak lurus pada *J* di atas garis *X-X* (sebab τ_{xy} positif pada sumbu x-x) dan buat potongan garis *JD* yang besarnya sesuai dengan tegangan geser τ_{xy}dengan skala tertentu. Dengan cara yang sama buat garis tegak lurus pada titik *K* di bawah garis x-x (karena τ_{xy} negatif pada sumbu y-y) dan buat potongan garis *KE* yang besarnya sama dengan tegangan geser τ_{xy}. Tarik garis *DE* dan bagi dua pada *C*.
4. Dengan *C* sebagai pusat dan jari jari *CD* atau *CE* buatlah sebuah lingkaran. Lingkaran ini disebut *Lingkaran Mohr untuk Tegangan*.
5. Melalui titik *C* gambarlah garis *CP* dengan sudut sebesar 2θ dengan *CE* dan arah searah jarum jam, memotong lingkaran pada titik *P*.
6. Melalui *P*, gambar garis *PQ* yang tegak lurus terhadap *OX*. Tarik garis *OP*.
7. Panjang garis *OQ, QP* dan *OP* masing-masing adalah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan, sesuai dengan skala yang digunakan. Garis *OG* dan *OH* masing-masing merupakan tegangan geser prinsipal maksimum dan minimum. Sudut *POC* merupakan sudut kemiringan (θ).



Gambar 3.20:

Contoh soal 3.9.[1] Sebuah elemen bidang pada sebuah boiler menerima tegangan tarik sebesar 400 MPa pada satu bidang dan 150 MPa pada bidang lainnya yang tegak lurus terhadap bidang pertama. Setiap tegangan tersebut disertai dengan tegangan geser sebesar 100 MPa dimana jika dikaitkan dengan tegangan tarik minor akan cendrung merotasikan elemen berlawanan arah jarum jam. Carilah:

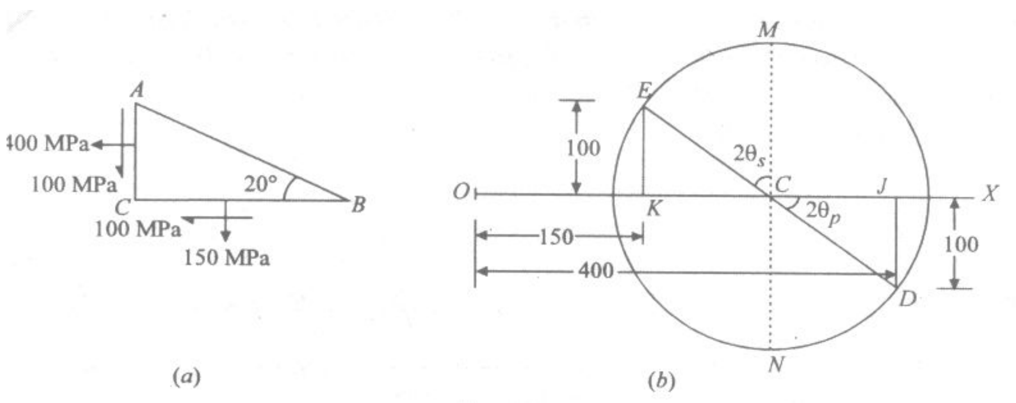
[1]Kita telah membahas soal ini dengan cara analitik pada halaman 47

1. Tegangan prinsipal dan arahnya.

2. Tegangan geser maksimum dan arahnya pada bidang dimana tegangan ini bekerja.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 400$ MPa
$\sigma_y = 150$ MPa
$\tau_{xy} = -100$ MPa (tanda negatif dikarenakan berlawanan jarum jam pada sumbu *x*-*x*



Gambar 3.21:

Tegangan-tegangan yang diberikan pada bidang *AC* dan *BC* dari elemen dan tegangan geser pada bidang *BC* ditunjukkan oleh gambar 3.21(*a*). Sekarang gambarlah diagram tegangan Mohr seperti ditunjukkan oleh gambar 3.21(*b*) dan dibicarakan berikut ini.

1. Pertama-tama, ambillah sembarang titik *O* dan buatlah garis horisontal *OX*.

2. Buat potongan garis *OJ* dan *OK* yang masing-masing besarnya sama dengan tegangan tarik σ_x (yaitu 400 MPa) dan tegangan tarik σ_y (yaitu 150 MPa) sesuai dengan skala tertentu ke kanan.

3. Sekarang buat garis tegak lurus *J* di bawah garis *OX* dan buat potongan garis *JD* yang sama besar dan negatif dengan tegangan geser pada bidang *AC* (yaitu 100 MPa) sesuai dengan skala. Dengan cara yang sama buat garis tegak lurus *K* di atas garis *OX* dan buat garis *KE* yang besarnya sama dan positif dengan tegangan geser bidang *BC* (yaitu 100 MPa) sesuai skala. Buat garis *DE* dan bagi dua di titik *C*.

4. Dengan *C* sebagai pusat dan jari-jari *CD* atau *CE*, gambarlah lingkaran tegangan Mohr.

5. Melalui *C* gambarlah dua garis *CM* dan *CN* yang tegak lurus terhadap garis *OX* dan memotong lingkaran pada *M* dan *N*. Melalui *C* gambar juga garis *CP* yang membentuk sudut $2 \times 20^0 = 40^0$ dengan *CE* pada arah searah jarum jam dan memotong lingkaran pada titik *P*.

6. Melalui *P*, gambarlah *PQ* yang tegak lurus terhadap garis *OX*. Buat garis *PO*.

Dengan pengukuran, kita memperoleh tegangan prinsipal maksimum (σ_{max}) = *OG* = 435,0 MPa. Tegangan prinsipal minimum (σ_{min}) = *OH* = 115,0 MPa. Dengan pengukuran, $\angle JCD = 2\theta_p = 38,66^0$, maka sudut yang dibuat bidang tegangan prinsipal dengan sumbu *x-x* $(\theta_p) = \frac{\angle JCD}{2} = \frac{38,66^0}{2} = 19,33^0$; Tegangan geser maksimum $(\tau_{max}) = CM = 160,0$ MPa; Dengan pengukuran $\angle MCE = 2\theta_s = 51,34^0$, maka sudut bidang tegangan geser maksimum dengan sumbu *x-x* $(\theta_s) = \frac{51,34^0}{2} = 25,7^0$.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah batang mendapat tegangan tarik sebesar 100 MPa. Carilah tegangan normal dan tangensial pada bidang dengan sudut 30^0 dengan arah tegangan tarik.

2. Sebuah titik pada sebuah material yang mengalami regangan mendapat tegangan tarik sebesar 50 MPa. Carilah tegangan normal dan tegangan geser pada sudut 50^0 dengan arah tegangan.

3. Sebuah titik pada sebuah material yang mengalami regangan, tegangan prinsipalnya adalah 100 MPa dan 50 MPa dan keduanya tarik. Carilah tegangan normal dan tegangan geser bidang yang membentuk sudut sebesar 60^0 dengan sumbu tegangan prinsipal mayor. Cari dengan metode grafik.

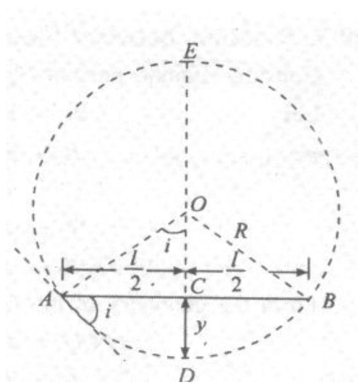
4. Sebuah titik pada material yang mengalami regangan menerima tegangan tarik sebesar 120 MPa dan tegangan geser sebesar 40 MPa dan searah dengan jarum jam. Berapakah nilai tegangan normal dan tegangan geser dari sebuah bidang yang membentuk sudut sebesar 25^0 dengan normal dari tegangan tarik. Cari dengan metode grafik.

Bab 4

Defleksi Batang

4.1 Kurva Bending Batang

Misalkan sebuah batang AB mendapat momen bending. Karena pembebanan ini, maka batang mengalami defleksi dari ACB menjadi ADB yang berupa busur lingkaran, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.1.



Gambar 4.1: Kurva Batang

Misalkan l = panjang batang AB
M = momen bending
R = jari-jkari kurva kelengkungan batang
I = momen inersia penampang batang
E = modulus elastisitas material batang
y = deflekasi batang (yaitu: CD)
i = kemiringan/slope batang

Dari geometri lingkaran, kita dapatkan:

$$
\begin{aligned}
AC \times CB &= EC \times CD \\
\frac{l}{2} \times \frac{l}{2} &= (2R - y) \times y \\
\frac{l^2}{4} &= 2Ry - y^2
\end{aligned}
$$

dengan mengabaikan y^2

$$
\begin{aligned}
\frac{l^2}{4} &= 2Ry \\
y &= \frac{l^2}{8R} \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Telah diketahui bahwa untuk batang yang mendapat beban berlaku:

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \text{ atau } R = \frac{EI}{M}$$

dengan mensubstitusikan harga *R* ini ke persamaan 4.1

$$y = \frac{l^2}{8 \times \frac{EI}{M}} = \frac{Ml^2}{8EI}$$

Dari bentuk geometri gambar, kita peroleh bahwa kemiringan batang *i* pada *A* atau *B* juga sama dengan sudut *AOC*:

$$\sin i = \frac{AC}{OA} = \frac{l}{2R}$$

karena sudut *i* sangat kecil, karenanya sin *i* diambil harganya sama dengan *i* (dalam radian).

$$i = \frac{l}{2R} \text{ radian} \qquad (4.2)$$

Dengan mensubstitusikan harga *R* ke persamaan 4.2,

$$i = \frac{l}{2R} = \frac{l}{2 \times \frac{EI}{M}} = \frac{Ml}{2EI} \text{ radian} \qquad (4.3)$$

Catatan:

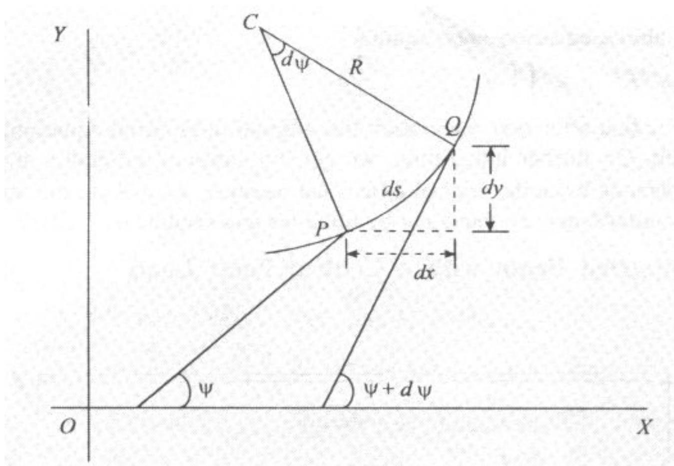
1. Persamaan di atas untuk defleksi (*y*) dan kemiringan (*i*) diturunkan hanya dari momen bending dan efek gaya geser diabaikan. Hal ini dikarenakan bahwa efek gaya geser kecil sekali bila dibandingkan dengan efek momen bending.

2. Dalam kondisi praktis, batang membengkok membentuk busur lingkaran hanya pada beberapa kasus. Pembahasan lebih lanjut menunjukkan bahwa batang akan membengkok membentuk busur lingkaran hanya jika (i) batang mempunyai penampang yang seragam, dan (ii) batang mendapat momen konstan pada keseluruhan panjang atau batang mempunyai kekuatan yang seragam.

4.2 Hubungan Antara Kemiringan, Defleksi dan Jari-jari Kurva

Misalkan bagian kecil *PQ* dari sebuah batang, melengkung membentuk busur seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.2.

Misalkan *ds* = panjang batang *PQ*
R = jari-jari busur
C = pusat busur
ψ = sudut, yang merupakan tangen pada *P* dengan sumbu x-x
$\psi + d\psi$ = sudut yang merupakan tangen pada *Q* dengan sumbu x-x



Gambar 4.2: Batang membengkok membentuk busur.

Dari geometri gambar, diperoleh:

$$\begin{aligned} \angle PCQ &= d\psi \\ ds &= R.d.\psi \\ R &= \frac{ds}{d\psi} = \frac{dx}{d\psi} \end{aligned}$$

dengan menganggap *ds* = *dx*.

$$\frac{1}{R} = \frac{d\psi}{dx}$$

Kita tahu bahwa jika *x* dan *y* adalah koordinat pada titik *P*, maka:

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

Karena ψ adalah sudut yang sangat kecil, dengan mengambil tan $\psi = \psi$,

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

karena $\frac{1}{R} = \frac{d\psi}{dx}$.
Maka:

$$\begin{aligned} \frac{M}{I} &= \frac{E}{R} \quad \text{atau} \quad M = EI \times \frac{1}{R} \\ M &= EI \times \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}$$

Catatan: persamaan di atas juga didasarkan atas momen bending. Efek gaya geser sangat kecil dibandingkan dengan momen bending sehingga bisa diabaikan.

4.3 Metode Untuk Kemiringan dan Defleksi Pada Penampang

Banyak metode untuk mencari kemiringan dan defleksi pada batang terbebani, namun dua metode berikut ini akan dibicarakan lebih lanjut, yaitu:

1. Metode integrasi ganda/lipat dua.
2. Metode Macaulay.

Metode pertama cocok untuk beban tunggal, sedangkan metode kedua cocok untuk beban banyak.

4.4 Metode Integral Ganda Untuk kemiringan dan Defleksi

Kita sudah mengetahui bahwa momen bending pada satu titik:

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan ini:

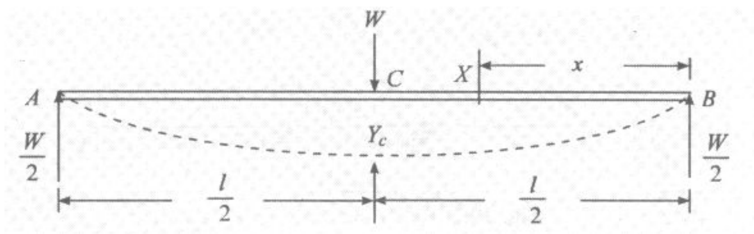
$$EI\frac{dy}{dx} = \int M$$

dan dengan mengintegrasikan persamaan di atas sekali lagi:

$$EIy = \int \int M$$

Jadi terlihat bahwa setelah integrasi pertama, diperoleh kemiringan pada satu titik, dan integrasi selanjutnya, diperoleh defleksi.

4.4.1 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Di Tengah



Gambar 4.3: Batang ditumpu sederhana dengan beban terpusat di tengah

Misalkan batang ditumpu sederhana *AB* dengan panjang *l* memikul beban terpusat *W* di tengah-tengahnya pada *C* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.3. Dari geometri gambar, kita dapatkan reaksi pada A:

$$R_A = R_B = \frac{W}{2}$$

Misalkan penampang *X* dengan jarak *x* dari *B*. Momen bending pada daerah ini:

$$\begin{aligned} M_X &= R_B.x = \frac{W}{2}x = \frac{Wx}{2} \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{Wx}{2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Wx^2}{4} + C_1 \tag{4.5}$$

dimana C_1 adalah konstanta pertama integrasi.
$x = \frac{l}{2}$, dan $\frac{dy}{dx} = 0$, dan mensubstisusikannya ke persamaan 4.5

$$0 = \frac{Wl^2}{16} + C_1 \quad \text{atau} \quad C_1 = -\frac{Wl^2}{16}$$

Dengan memasukkan harga C_1 ini ke persamaan 4.5:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Wx^2}{4} - \frac{Wl^2}{16} \tag{4.6}$$

Persamaan ini adalah persamaan untukmencari kemiringan pada penampang sembarang. Kemiringan maksimum pada *B*, dengan mensubstitusikan *x* = 0 pada persamaan 4.6:

$$\begin{aligned} EI.i_B &= -\frac{Wl^2}{16} \\ iB &= -\frac{Wl^2}{16EI} \end{aligned}$$

tanda negatif artinya tangen pada *B* membuat sudut dengan *AB* negatif atau berlawanan arah jarum jam.

atau:

$$i_B = \frac{Wl^2}{16EI} \quad \text{radian}$$

Berdasarkan geometri batang:

$$i_B = \frac{Wl^2}{16EI} \quad \text{radian}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan 4.6 sekali lagi:

$$EI.y = \frac{Wx^3}{12} - \frac{Wl^2x}{16} + C_2 \tag{4.7}$$

dimana C_2 adalah konstanta kedua integrasi. Jika $x = 0$ dan $y = 0$, mensubstitusikannya ke persamaan 4.7, kita peroleh $C_2 = 0$.

$$EI.y = \frac{Wx^3}{12} - \frac{Wl^2x}{16} \tag{4.8}$$

merupakan persamaan defleksi pada posisi sembarang.

Dari konstruksi batang terlihat bahwa defleksi maksimum akan terdapat pada titik *C* atau $x = l/2$ sehingga:

$$\begin{aligned} EI.y_C &= \frac{W}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{Wl^2}{16}\left(\frac{l}{2}\right) \\ &= \frac{Wl^3}{96} - \frac{Wl^3}{32} = -\frac{Wl^3}{48} \\ y_C &= -\frac{Wl^3}{48EI} \end{aligned}$$

tanda negatif menunjukkan defleksi ke bawah.

Contoh soal 4.1 Sebuah batang tumpuan sederhana dengan panjang span 3 m mendapat beban terpusat sebesar 10 kN. Carilah kemiringan dan defleksi maksimum pada batang. Ambil $I = 12 \times 10^6$ mm^4 dan modulus elastsitas $E = 200$ GPa.

Jawab.

Diketahui: l = 3 m = 3 $\times 10^3$ mm
W = 10 kN = 10 $\times 10^3$ N
I = 12 $\times 10^6$ mm^4
E = 200 GPa = 200 $\times 10^3$ N/mm^2

Kemiringan batang maksimum

$$i_A = \frac{Wl^2}{16EI} = \frac{(10 \times 10^3) \times (3 \times 10^3)^2}{16 \times (200 \times 10^3) \times (12 \times 10^6)} = 0,0023 \quad \text{rad}$$

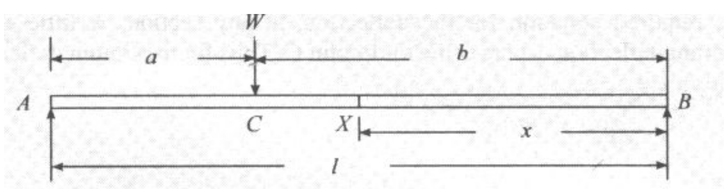
Defleksi maksimum

$$y_C = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{(10 \times 10^3) \times (3 \times 10^3)^3}{48 \times (200 \times 10^3) \times (12 \times 10^6)} = 2,3 \quad \text{mm}$$

4.4.2 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Eksentrik

Misalkan suatu batang *AB* dengan tumpuan sederhana dengan panjang l dan memikul beban terpusat eksentrik W pada C seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.4. Dari geometri gambar tersebut, kita dapatkan reaksi pada A:

$$R_A = \frac{Wb}{l} \quad \text{atau} \quad R_B = \frac{Wa}{l}$$



Gambar 4.4: Penampang X pada CB.

Misalkan penampang X pada CB berada pada jarak x dari B, dimana x lebih kecil dari b ($x < b$). Momen bending pada penampang ini:

$$M_X = R_B.x = \frac{Wax}{l}$$

sehingga

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Wax}{l}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{Wax^2}{2l} + C_1 \tag{4.9}$$

dimana C_1 adalah konstanta integrasi. Pada C, $x = b$ dan $\frac{dy}{dx} = i_C$, maka:

$$\begin{aligned} EI.i_C &= \frac{Wab^2}{2l} + C_1 \\ C_1 &= (EI.i_C) - \frac{Wab^2}{2l} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan harga C_1 ke persamaan 4.9,

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{Wax^2}{2l} + (EI.i_C) - \frac{Wab^2}{2l} \tag{4.10}$$

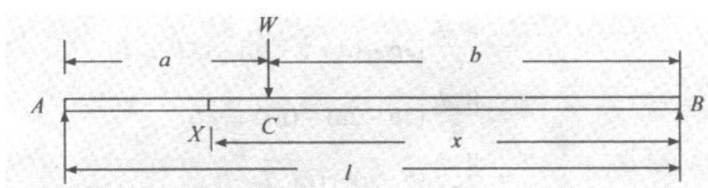
Dengan mengintegrasikan persamaan di atas sekali lagi:

$$EI.y = \frac{Wax^3}{6l} + (EI.i_C.x) - \frac{Wab^2x}{2l} + C_2$$

Pada $x = 0$ maka $y = 0$, sehingga didapat $C_2 = 0$, maka:

$$EI.y = \frac{Wax^3}{6l} + (EI.i_C.x) - \frac{Wab^2x}{2l} \tag{4.11}$$

Persamaan 4.10 dan 4.11 adalah persamaan-persamaan yang dibutuhkan untuk mencari kemiringan dan defleksi pada sembarang titik pada penampang AC. Terlihat bahwa persamaan ini bisa digunakan hanya apabila harga i_C diketahui.



Gambar 4.5: Penampang X pada AC.

Misalkan penampang X pada AC pada jarak x dari B dimana x lebih besar dari b ($x>b$) seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.5. Momen bending pada penampang ini:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{Wax}{l} - W(x-b) \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{Wax}{l} - W(x-b) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{Wax^2}{2l} - \frac{W(x-b)^2}{2} + C_3 \tag{4.13}$$

Pada *C*, *x* = *b* dan $\frac{dy}{dx} = i_C$, maka:

$$\begin{aligned} EI.i_C &= \frac{Wab^2}{2l} + C_3 \\ C_3 &= (EI.i_C) - \frac{Wab^2}{2l} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan C_3 persamaan 4.13:

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{Wax^2}{2l} - \frac{W(x-b)^2}{2} + (EI.i_C) - \frac{Wab^2}{2l} \tag{4.14}$$

Dengan mengintegrasikan sekali lagi persamaan di atas:

$$EI.y = \frac{Wax^3}{6l} - \frac{W(x-b)^3}{6} + (EI.i_C) - \frac{Wab^2}{2l}x + C_4 \tag{4.15}$$

Pada *x* = *l* maka *y* = 0 sehingga persamaan di atas menjadi:

$$0 = \frac{Wal^2}{6} - \frac{Wa^3}{6} - \frac{Wab^2}{2} + (EI.i_C.l) + C_4$$

karena $(x-b) = a$.

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{Wab^2}{2} + \frac{Wa^3}{6} - \frac{Wal^2}{2} - (EI.i_C.l) \\ &= \frac{Wab^2}{2} + \frac{Wa}{6}(a^2 - l^2) - (EI.i_C.l) \\ &= \frac{Wab^2}{2} - \frac{Wa}{6}[(l+a)(l-a)] - (EI.i_C.l) \end{aligned}$$

$l^2 - a^2 = (l+a)(l-a)$

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{Wab^2}{2} - \frac{Wab}{6}(l+a) - (EI.i_C.l) \\ &= \frac{Wab}{6}[3b - (l+a)] - (EI.i_C.l) \\ &= \frac{Wab}{6}[3b - (a+b+a)] - (EI.i_C.l) \\ &= \frac{Wab}{6}(2b - 2a) - (EI.i_C.l) \\ &= \frac{Wab}{3}(b-a) - (EI.i_C.l) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan C_4 ke persamaan 4.15:

$$\begin{aligned} EI.y &= \frac{Wax^3}{6l} - \frac{W(x-b)^3}{6} + (EI.i_C.x) - \frac{Wab^2x}{2l} \\ &\quad + \frac{Wab}{3}(b-a) - (EI.i_C.l) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Persamaan 4.14 dan persamaan 4.16 adalah persamaan yang digunakan untuk mencari kemiringan dan defleksi pada sembarang titik pada penampang *AC*. Persamaan akan bisa dipakai hanya jika harga i_C diketahui. Untuk mendapatkan harga i_C, pertama-tama kita cari defleksi pada *C* dari persamaan untuk penampang *AC* dan *CB*.

Substitusikan harga $x = b$ ke persamaan 4.12 dan menyamakannya dengan persamaan 4.16 sehingga:

$$\begin{aligned} \frac{Wab^3}{6l} + (EI.i_C.b) - \frac{Wab^3}{2l} &= \frac{Wab^3}{6l} - \frac{W(x-b)^3}{6} + (EI.i_C.b) - \frac{Wab^3}{2l} \\ &\quad + \frac{Wab^3}{3}(b-a) - (EI.i_C.l) \\ EI.i_C &= \frac{Wab^3}{3}(b-a) \end{aligned}$$

Substitusikan harga $EI.i_C$ ke persamaan 4.10

$$\begin{aligned} EI.\frac{dy}{dx} &= \frac{Wax^2}{2l} + \frac{Wab}{3l}(b-a) - \frac{Wab^2}{2l} \\ &= \frac{Wa}{6l}[3x^2 + 2b(b-a) - 3b^2] \\ &= \frac{Wa}{6l}(3x^2 - b^2 - 2ab) \end{aligned} \tag{4.17}$$

Persamaan ini diperlukan untuk mencari kemiringan pada penampang *BC*. Kita tahu bahwa kemiringan maksimum terdapat pada *B*. Sehingga dengan memasukkan $x = 0$ ke persamaan 4.17, maka kemiringan pada *B*:

$$\begin{aligned} EI.i_B &= \frac{Wa}{6l}(-b^2 - 2ab) \\ &= -\frac{Wa}{6l}(b^2 + 2ab) \\ &= -\frac{Wab}{6l}(b + 2a) \\ &= -\frac{Wa}{6l}(l-a)(l+a) \\ &= \frac{Wa}{6l}(l^2 - a^2) \end{aligned}$$

dimana a = l-b dan a+b = l. atau:

$$i_B = -\frac{Wa}{6EI.l}(l^2 - a^2)$$

tanda negatif menunjukkan bahwa tangen pada *B* membuat sudut dengan *AB* negatif atau berlawanan jarum jam.

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$i_A = \frac{Wb}{6EI.l}(l^2 - b^2)$$

Untuk defleksi pada sembaran titik pada *AC*, substitusikan harga $EI.i_C$ ke persamaan 4.11:

$$\begin{aligned}
EI.y &= \frac{Wax^3}{6l} + \frac{Wab}{3l}(b-a)x - \frac{Wab^2x}{2l} \\
&= \frac{Wax}{6l}[x^2 + 2b(b-a) - 3b^2] \\
&= \frac{Wax}{6l}(x^2 + 2b^2 - 2ab - 3b^2) \\
&= \frac{Wax}{6l}(x^2 - b^2 - 2ab) \\
&= -\frac{Wax}{6l}[b(b+2a) - x^2] \\
&= -\frac{Wax}{6l}[(l-a)(l+a) - x^2] \\
&= -\frac{Wax}{6l}[l^2 - a^2 - x^2] \\
y &= -\frac{Wax}{6l.EI}[l^2 - a^2 - x^2] \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Tanda negatif menunjukkan defleksi ke bawah.

Untuk defleksi pada *C*, dengan substitusi x = b ke persamaan di atas:

$$y_C = \frac{Wax}{6l.EI}(l^2 - a^2 - b^2)$$

Defleksi maksimum terjadi di daerah *CB* karena b > a. Untuk defleksi maksimum, substitusikan harga $\frac{dy}{dx} = 0$. Maka dengan menyamakan persamaan 4.17 dengan nol:

$$\begin{aligned}
\frac{Wa}{6l}(3x^2 - b^2 - 2ab) &= 0 \\
3x^2 - b(b + 2ab &= 0 \\
3x^2 - (l-a)(l+b) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - (l^2 - a^2) &= 0 \\ 3x^2 &= l^2 - a^2 \\ x &= \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}} \end{aligned}$$

Untuk defleksi maksimum, substitusikan harga x ini ke persamaan 4.18:

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{Wax}{6l.EI}\sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}} \times \left[l^2 - a^2 - \left(\frac{l^2 - a^2}{3}\right)\right] \\ &= \frac{Wax}{6l.EI}\sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}} \times \left[\frac{2}{3}(l^2 - a^2)\right] \\ &= \frac{Wa}{9\sqrt{3}EI.l} \times (l^2 - a^2)^{3/2} \end{aligned}$$

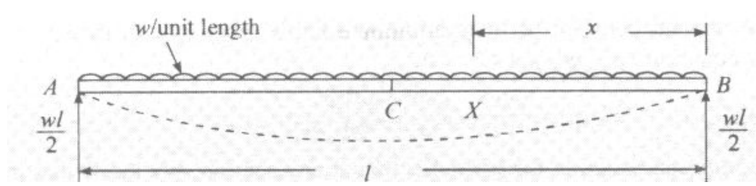
Contoh soal 4.2 Sebuah batang dengan penampang seragam dengan panjang 1 m ditumpu sederhana pada ujung-ujungnya. Batang mendapat beban terpusat W pada jarak $l/3$ dari salah satu ujungnya. Carilah defleksi batang di bawah beban.

Jawab.

Diketahui: jarak antara beban dengan ujung kiri (a) = $l/3$, atau jarak beban dengan ujung kanan (b) = l - $l/3$ = $2l/3$. Defleksi di bawah beban:

$$\begin{aligned} &= \frac{Wab}{6EIl}(l^2 - a^2 - b^2) = \frac{W \times \frac{l}{3} \times \frac{2l}{3}}{6EIl}\left[l^2 - \left(\frac{l}{3}\right)^2 - \left(\frac{2l}{3}\right)^2\right] \\ &= 0,0165\frac{Wl^3}{EI} \end{aligned}$$

4.4.3 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terdistribusi Merata



Gambar 4.6: Beban terdistribusi merata.

Misalkan suatu konstruksi batang ditumpu sederhana AB dengan panjang l mendapat beban terdistribusi merata sebesar w per satuan panjang, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.6. Dari geometri gambar bisa diketahui reaksi pada A:

$$R_A = R_B = \frac{wl}{2}$$

Misalkan suatu penampang *X* pada jarak *x* dari *B*. Kita bisa cari momen bending pada penampang ini:

$$M_X = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

sehingga:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} + C_1 \tag{4.19}$$

dimana C_1 adalah konstanta integrasi pertama. Kita tahu bahwa $x = l/2$, maka $\frac{dy}{dx} = 0$. Substitusikan harga-harga ini ke persamaan di atas:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{wl}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{w}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + C_1 = \frac{wl^3}{16} - \frac{wl^3}{48} + C_1 \\ C_1 &= -\frac{wl^3}{24} \end{aligned}$$

Substitusikan harga C_1 ke persamaan 4.19:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} + \frac{wl^3}{24} \tag{4.20}$$

Kemiringan maksimum akan terjadi pada *A* dan *B*. Jadi kemiringan maksimum, substitusikan $x = 0$ ke persamaan 4.20:

$$\begin{aligned} EI.i_B &= \frac{wl^3}{24} \\ i_B &= -\frac{wl^3}{24EI} \end{aligned}$$

Tanda negatif artinya tangen *A* dengan sudut *AB* adalah negatif atau berlawanan jarum jam.

Karena simetri maka:

$$i_A = \frac{wl^3}{24EI}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan 4.20 sekali lagi:

$$EI.y = \frac{wlx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^3x}{24} + C_2 \quad (4.21)$$

Kita tahu bahwa pada *x* = 0 maka *y* = 0. Dengan mensubstitusikan harga-harga ini ke persamaan 4.21, kita peroleh $C_2 = 0$.

$$EI.y = \frac{wlx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^3x}{24} \quad (4.22)$$

Persamaan di atas adalah persamaan defleksi pada sembarang bagian pada batang *AB*. Defleksi maksimum terdapat pada titik tengan *C*. Dengan mensubstitusikan harga *x* = *l*/2 ke persamaan 4.22, defleksi maksimal:

$$\begin{aligned} EI.y_C &= \frac{wl}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{w}{24}\left(\frac{l}{2}\right)^4 - \frac{wl^3}{24}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{wl^4}{96} - \frac{wl^4}{384} - \frac{wl^4}{48} \\ &= -\frac{5wl^4}{384} \\ y_C &= -\frac{5wl^4}{384EI} \end{aligned}$$

tanda negatif menunjukkan defleksi mempunyai arah ke bawah. Persamaan defleksi dan kemiringan di atas bisa juga dinyatakan dengan beban total yaitu *W* = *wl*.

$$i_B = i_A = -\frac{wl^3}{24EI} = -\frac{Wl^2}{24EI}$$

dan

$$y_C = -\frac{5wl^4}{384EI} = -\frac{5Wl^3}{384EI}$$

Contoh soal 4.3 Sebuah batang tumpuan sederhana dengan span 6 m memikul beban terdistribusi merata pada keseluruhan panjangnya. Jika defleksi pada pusat batang tidak melebihi 4 mm, carilah besarnya beban. Ambil *E* = 200 GPa dan *I* = 300×10^6 mm^4.

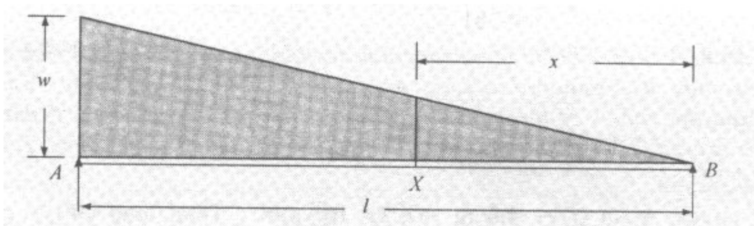
Jawab:

Diketahui: *l* = 6 m = 6 $\times 10^6$ mm
y_C = 4 mm
E = 200 GPa = 200×10^3 N/mm^2
I = 300×10^6 mm^4

Defleksi pada pusat batang (y_C):

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{5wl^4}{3846EI} = \frac{5 \times w \times (6 \times 10^3)^4}{384 \times (200 \times 10^3) \times (300 \times 10^6)} = 0,281 \text{ w} \\ w &= \frac{4}{0,281} = 14,2 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

4.4.4 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual



Gambar 4.7:

Misalkan batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang *l* mendapat beban bervariasi secara gradual dari nol pada *B* hingga *w* per satuan panjang pada *A*, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.7. dari geometri gambar, reaksi pada *A*:

$$R_A = \frac{wl}{3} \quad \text{dan} \quad R_B = \frac{wl}{6}$$

Sekarang misalkan penampang *X* berada pada jarak *x* dari *B*. Momen bending pada penampang ini:

$$\begin{aligned} M_X &= R_B.x - \left(\frac{wx}{l} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3}\right) = \frac{wlx}{6} - \frac{wx^3}{6l} \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{wlx}{6} - \frac{wx^3}{6l} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{12} - \frac{wx^4}{24l} + C_1 \tag{4.24}$$

Integrasi persamaan 4.24 sekali lagi:

$$EI.y = \frac{wlx^3}{36} - \frac{wx^5}{120l} + C_1 + C_2 \tag{4.25}$$

Pada $x = 0$ maka $y = 0$. Karenanya $C_2 = 0$. Pada $x = l$ maka $y = 0$. Substitusikan harga-harga ini ke persamaan 4.25:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{wl}{36} \times l^3 - \frac{2}{120l} \times l^5 + C_1 l = \frac{wl^4}{36} - \frac{wl^4}{120} + C_1 l \\ C_1 &= -\frac{wl^3}{36} - \frac{wl^3}{120} = -\frac{7wl^3}{360} \end{aligned}$$

Sekarang substitusikan harga C_1 ke persamaan 4.24:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{12} - \frac{wx^4}{24l} - \frac{7wl^3}{360} \tag{4.26}$$

Kemiringan maksimal terdapat pada titik *A* atau *B*. Untuk kemiringan pada *A*, substitusikan *x* = *l* ke persamaan 4.26:

$$\begin{aligned} EI.i_A &= \frac{wl}{12} \times l^2 - \frac{w}{24l} \times l^4 - \frac{7wl^3}{360} = \frac{wl^3}{45} \\ i_A &= \frac{wl^3}{45} \end{aligned}$$

Untuk kemiringan pada *B*, substituiskan *x* = 0 ke persamaan 4.26:

$$\begin{aligned} EI.i_B &= -\frac{7wl^3}{360} \\ i_B &= -\frac{7wl^3}{360} \qquad \text{radian} \end{aligned}$$

Sekarang substitusikan haraga C_1 ke persamaan 4.25:

$$\begin{aligned} EI.y &= \frac{wlx^3}{36} - \frac{wx^5}{120l} - \frac{7wl^3x}{360} \\ y &= \frac{1}{EI}\left(\frac{wlx^3}{36} - \frac{wx^5}{120l} - \frac{7wl^3x}{360}\right) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Untuk mencari defleksi pada pusat batang, substitusikan *x* = *l*/2 ke persamaan 4.27:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{36}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{2}{120l}\left(\frac{l}{2}\right)^5 - \frac{7wl^3}{360}\left(\frac{l}{2}\right)\right) \\ &= -\frac{0,00651wl^4}{EI} \end{aligned}$$

Defleksi maksimum akan terjadi apabila harga kemiringannya nol. Karena itu dengan menyamakan persamaan 4.26 dengan nol:

$$\begin{aligned} \frac{wlx^2}{12} - \frac{wx^4}{24l} - \frac{7wl^3}{360} &= 0 \\ x &= 0,519l \end{aligned}$$

Sekarang substitusikan harga *x* ini ke persamaan 4.27:

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{36}(0,519l)^3 - \frac{w}{120l}(0,519l)^5 - \frac{7wl}{360}(0,519l)\right) \\ &= \frac{0,00652wl^4}{EI} \end{aligned}$$

Contoh soal 4.4 Sebuah batang dengan tumpuan sederhana *AB* dengan span 4 meter memikul beban segitiga bervariasi dari nol pada *B* hingga 5 kN/m pada A. Carilah defleksi maksimum batang. Ambil rigiditas batang sebesar $1,25 \times 10^{12}$ N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: l = 4 m = 4 $\times 10^3$ mm
beban pada A = w = 5 kN/m = 5 N/mm
EI = $1,25 \times 10^{12}$ N/mm^2

Defleksi maksimum pada batang:

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{0,00652wl^4}{EI} = \frac{0,00652 \times 5 \times (4 \times 10^3)^4}{1,25 \times 10^{12}} \\ &= 668 \text{ mm} \end{aligned}$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Batang dengan tumpuan sederhana dengan bentangan 2,4 m mendapat beban terpusat di tengah sebesar 15 kN. Berapakah kemiringan maksimum pada pusat batang? Ambil harga *EI* batang sebesar 6×10^{10} N-mm^2.

2. Sebuah batang dengan panjang 3 m ditumpu di kedua ujungnya, mendapat beban terpusat di tengah-tengah batang. Jika kemiringan pada ujung batang tidak melebihi 1^0, carilah defleksi pada tengah batang.

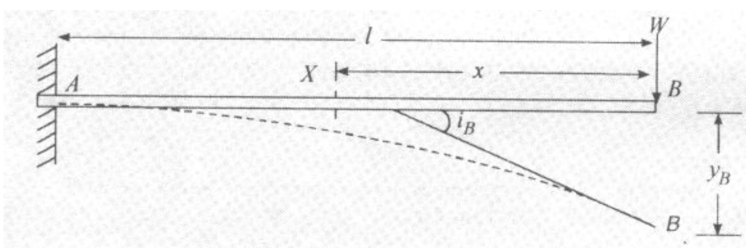
3. Sebuah batang dengan tumpuan sederhana mendapat beban terdistribusi merata sebesar 16 kN/m. Jika defleksi batang pada tengahnya dibatasi sebesar 2,5 mm, carilah panjang batang. Ambil *EI* batang sebesar 9×10^{12} N-mm^2.

Bab 5

Defleksi Kantilever

5.1 Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Ujung Bebasnya

Misalkan kantilever *AB* dengan panjang *l* menerima beban terpusat *W* pada ujung bebasnya seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.1.



Gambar 5.1: Beban terpusat pada ujung bebas.

Andaikan penampang *X* pada jarak *x* dari ujung bebas *B*, momen bending pada penampang ini adalah:

$$\begin{aligned} M_X &= -W.x \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -W.x \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{W.x^2}{2} + C_1 \tag{5.2}$$

pada *x* = *l*, $\frac{dy}{dx} = 0.$ Substitusikan nilai ini ke persamaan di atas:

$$0 = -\frac{W.l^2}{2} + C_1 \quad \text{atau} \quad C_1 = \frac{W.l^2}{2}$$

Masukkan harga C_1 ke persamaan 5.2, sehingga:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{W.x^2}{2} + \frac{W.l^2}{2} \tag{5.3}$$

Persamaan di atas merupakan rumus untuk mencari kemiringan pada sembaran titik pada kantilever. Kemiringan maksimum terjadi pada ujung bebas atau pada x = 0, sehingga persamaan 5.3 menjadi:

$$\begin{aligned} EI.i_B &= \frac{Wl^2}{2} \\ i_B &= \frac{Wl^2}{EI2} \quad \text{radian} \end{aligned}$$

Harga yang positif menunjukkan bahwa tangen pada *B* yang membuat sudut dengan *AB* adalah positif atau searah jarum jam.

Dengan mengintegrasikan persamaan 5.3 sekali lagi, sehingga:

$$EI.y = -\frac{W.x^3}{6} + \frac{W.l^2x}{2} + C_2 \tag{5.4}$$

Pada x = l maka y = 0. Substitusikan harga ini ke persamaan di atas, sehingga:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{W.l^3}{6} + \frac{W.l^3x}{2} + C_2 = \frac{W.l^3x}{3} + C_2 \\ C_2 &= -\frac{W.l^3}{3} \end{aligned}$$

Substitusikan harga C_2 ke persamaan 5.4:

$$\begin{aligned} EI.y &= -\frac{W.x^3}{6} + \frac{W.l^2x}{2} - \frac{W.l^3}{3} \\ &= -\frac{Wl^2x}{2} - \frac{Wx^3}{6} - \frac{Wl^3}{3} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Persamaan ini adalah persamaan untuk mencari defleksi pada sembarang titik. Defleksi maksimum terdapat pada ujung bebas. Dengan mengganti harga x = 0 pada persamaan di atas, defleksi maksimum:

$$\begin{aligned} EI.y_B &= -\frac{Wl^3}{3} \\ y_B &= -\frac{Wl^3}{3EI} \end{aligned}$$

Tanda negatif menunjukkan bahwa arah defleksi ke bawah.

Contoh soal 5.1 Sebuah batang kantilever dengan lebar 120 mm dan tinggi 150 mm mempunyai panjang 1,8 m. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang, ketika batang mendapat beban terpusat 20 kN pada ujung bebasnya. Ambil harga *E* batang 200 GPa.

Jawab:

Diketahui: b = 120 mm
d = 150 mm
l = 1,8 m = 1,8 $\times 10^3$ mm
W = 20 kN = 20 $\times 10^3$ N
E = 200 GPa = 200 $\times 10^3$ N/mm^2

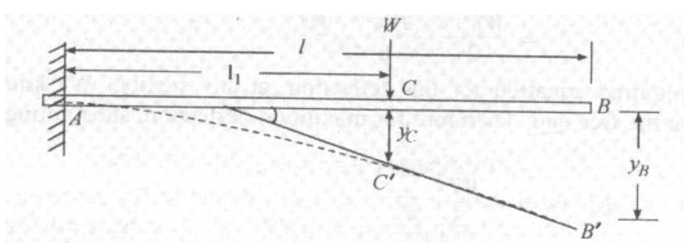
Kemiringan pada ujung bebas

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{120 \times (150)^3}{12} = 33,75 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

dan kemiringan pada ujung bebas:

$$i_B = \frac{Wl^2}{3EI} = \frac{(20 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)^3}{3 \times (200 \times 10^3) \times (33,75 \times 10^6)} = 5,76 \text{ mm}$$

5.2 Kantilever Dengan Beban Terpusat Tidak Pada Ujung Bebasnya



Gambar 5.2: Beban terpusat tidak pada ujung bebasnya.

Misalkan kantilever *AB* dengan panjang *l* mendapat beban terpusat *W* pada jarak l_1 dari ujung tetap seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.2. Dari gambar terlihat bahwa bagian *AC* dari kantilever akan melengkung menjadi *AC',* sedangkan bagian *CB* tetap lurus dengan posisi *C'B'* seperti ditunjukkan gambar 5.2. Bagian *AC* sejenis dengan kantilever seperti yang dibahas pada seksi 5.1.

$$i_C = \frac{Wl_1^2}{2EI}$$

KArena bagian *CB* adalah lurus, maka:

$$i_B = i_C = \frac{Wl_1^2}{2EI}$$

dan

$$y_C = \frac{Wl_1^3}{3EI}$$

Dari geometri pada gambar, kita dapatkan:

$$y_B = y_C + i_C(l - l_1) = \frac{Wl_1^3}{3EI} + \frac{Wl_1^2}{2EI}(l - l_1)$$

Jika $l_1 = \frac{l}{2}$, $y_B = \frac{W}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{W}{2EI}\left(\frac{l}{2}\right)^2 \times \frac{l}{2} = \frac{5Wl^3}{48EI}$

Contoh soal 5.2 Sebuah batang kantilever dengan panjang 3 m mendapat beban terpusat sebesar 20 kN pada jarak 2 m dari ujung tetap. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang kantilever. Ambil harga *EI* = 8×10^{12} N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: l = 3m = 3×10^3 mm
W = 20 kN = 20×10^3 N
l_1 = 2 m = 2×10^3 mm
EI = 8×10^{12} N-mm^2

Kemiringan pada ujung bebas

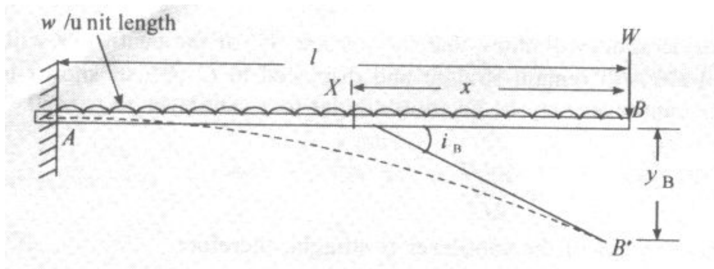
$$i_B = \frac{Wl_1^2}{2EI} = \frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{2 \times (8 \times 10^{12})} = 0,005 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas kantilever

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{Wl_1^3}{3EI} + \frac{Wl_1^2}{2EI}(l - l_1) \\ &= \left[\frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{3 \times (8 \times 10^{12})}\right] \\ &\quad + \frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{2 \times (8 \times 10^{12})}\left[(3 \times 10^3) - (2 \times 10^3)\right] \\ &= 6,7 + 5,0 = 11,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

5.3 Kantilever Dengan Beban Terdistribusi Merata

Misalkan kantilever *AB* dengan panjang *l* mendapat beban terdistribusi merata *w* persatuan panjang seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.3. Misalkan penampang *X* pada jarak *x* dari ujung bebas *B*. Momen bending pada daerah ini:



Gambar 5.3: Beban terdistribusi merata.

$$\begin{aligned} M_X &= -\frac{wx^2}{2} \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{wx^2}{2} \end{aligned}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + C_1$$

Jika $x = l$ maka $\frac{dy}{dx} = 0$. Substitusikan harga ini ke persamaan di atas:

$$0 = -\frac{wl^3}{6} + C_1 \quad \text{atau} \quad C_1 = \frac{wl^3}{6}$$

Substitusikan harga C_1 ke persamaan di atas, sehingga:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + \frac{wl^3}{6} \tag{5.6}$$

Ini merupakan persamaan untuk mencari kemiringan pada sembarang titik. Untuk kemiringan maksimum, masukkan harga $x = 0$ pada persamaan 5.6:

$$\begin{aligned} EI.i_B &= \frac{wl^3}{6} \\ i_B &= \frac{wl^3}{6EI} \qquad \text{radian} \end{aligned}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan 5.6 sekali lagi:

$$EI.y = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wl^3x}{6} + C_2 \tag{5.7}$$

Pada $x = l$ maka $y = 0$. Substitusikan harga ini ke persamaan di atas:

$$0 = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wl^3x}{6} + C_2 \quad \text{atau} \quad C_2 = -\frac{wl^4}{8}$$

Substitusikan harga C_2 ke persamaan 5.7:

$$EI.y = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wl^3x}{6} - \frac{wl^4}{8} = \frac{wl^3x}{6} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^4}{8} \tag{5.8}$$

Ini adalah persamaan untuk mencari defleksi pada sembarang jarak *x* pada batang kantilever dengan beban terdistribusi merata. Defleksi maksimum terjadi pada ujung bebas. Karena itu untuk defleksi maksimum, substitusikan harga *x* = 0 pada persamaan 5.8:

$$\begin{aligned} EI.y_B &= -\frac{wl^4}{8} \\ y_B &= -\frac{wl^4}{8EI} \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan di atas bisa dinyatakan dalam beban total yaitu *W* = *wl*.

$$i_B = i_A = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{Wl^2}{6EI} \quad \text{dan} \quad y_B = -\frac{wl^4}{8EI} = -\frac{Wl^3}{8EI}$$

Contoh soal 5.3 Sebuah batang kantilever dengan panjang 2 m mendapat beban terdistribusi merata sebesar 5 kN/m pada keseluruhan panjangnya. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang kantilever. Ambil harga *EI* = $2,5 \times 10^{12}$ N-mm^2.

Jawab:

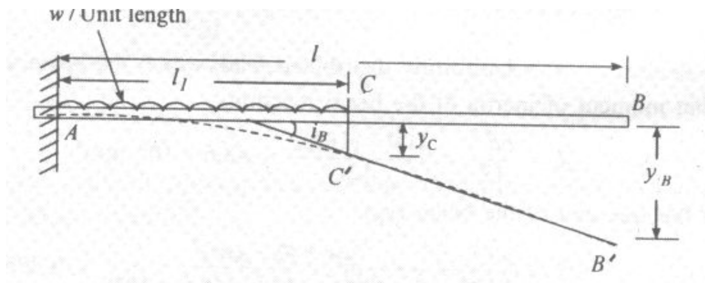
Diketahui: *l* = 2 m = 2×10^3 mm
w = 5 kN/m = 5 N/mm
EI = 2,5 $\times 10^{12}$ N-mm^2

Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{5 \times (2 \times 10^3)^3}{6 \times (2,5 \times 10^{12})} = 0,0027 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas kantilever

$$y = \frac{wl^4}{8EI} = \frac{5 \times (2 \times 10^3)^4}{8 \times (2,5 \times 10^{12})} = 4,0 \text{ mm}$$



Gambar 5.4: Beban terdistribusi merata pada sebagian kantilever.

5.4 Kantilever Terbebani Sebagian Dengan Beban Terdistribusi Merata

Misalkan kantilever *AB* dengan panjang *l* mendapat beban terdistribusi merata *w* persatuan panjang sepanjang l_1 dari ujung tetap, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.4. Bagian *AC* akan melengkung menjadi *AC*', sedangkan bagian *CB* akan tetap lurus seperti yang ditunjukkan oleh *C'B'*, seperti ditunjukkan oleh gambar. Bagian *AC* dari kantilever sejenis dengan kantilever pada seksi 5.3.

$$i_C = \frac{wl_1^3}{6EI} \quad \text{rad}$$

KArena bagian *CB* dari kantilever lurus, sehingga:

$$i_B = i_C = \frac{wl_1^3}{6EI}$$

dan

$$y_C = \frac{wl_1^4}{8EI}$$

Dari geometri gambar, kita peroleh:

$$y_B = y_C + i_C(l - l_1) = \frac{Wl_1^4}{8EI} + \frac{Wl_1^3}{6EI}(l - l_1)$$

Jika $l_1 = \frac{l}{2}$, $y_B = \frac{w}{8EI}\left(\frac{l}{2}\right)^4 + \frac{w}{6EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3 \times \frac{l}{2} = \frac{7wl^4}{384EI}$

Contoh soal 5.4 Sebuah batang kantilever dengan panjang 2,5 m mendapat beban terdistribusi sebagian sebesar 10 kN/m sepanjang 1,5 m dari ujung tetap. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang kantilever. Ambil harga rigiditas fleksural sebesar $1,9 \times 10^{12}$ N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: l = 2,5 m = $2,5 \times 10^3$ mm
w = 10 kN/m = 10 N/mm
l_1 = 1,5 m = $1,5 \times 10^3$ mm
EI = 1,9 $\times 10^{12}$ N-mm^2

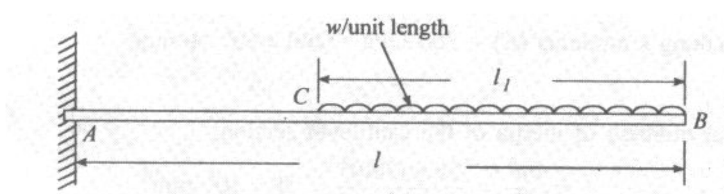
Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{wl_1^3}{6EI} = \frac{10 \times (1,5 \times 10^3)^3}{6 \times (1,9 \times 10^{12})} = 0,003 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas kantilever

$$\begin{aligned} y &= \frac{wl_1^4}{8EI} + \frac{wl_1^3}{6EI}[l - l_1] \\ &= \frac{10 \times (1,5 \times 10^3)^4}{8 \times (1,9 \times 10^{12})} + \frac{10 \times (1,5 \times 10^3)^3}{6 \times (1,9 \times 10^{12})} \\ &\quad \times \left[(2,5 \times 10^3) - (1,5 \times 10^3)\right] \\ &= 3,3 + 3 = 6,3 \text{ mm} \end{aligned}$$

5.5 Kantilever Dibebani Dari Ujung Bebas



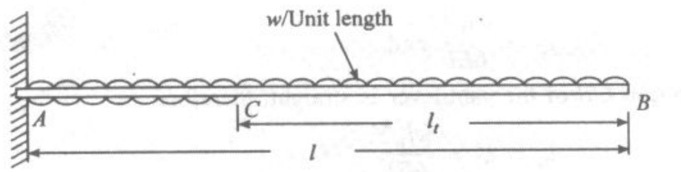
Gambar 5.5:

Misalkan kantilever *AB* dengan panjang *l* mendapat beban terdistribusi merata *w* per satuan panjang sepanjang l_1 dari ujung bebas seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.5.

Kemiringan dan defleksi kantilever dalam hal ini bisa dicari sebagai berikut:

1. Pertama-tama, misalkan keseluruhan kantilever dari *AB* dibebani dengan beban terdistribusi merata *w* per satuan panjang seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.6

2. Tambahkan beban terdistribusi merata *w* persatuan panjang dari *A* ke *C* seperti gambar 5.6.



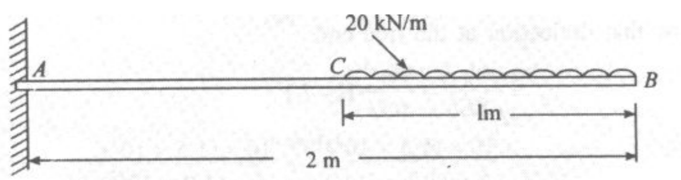
Gambar 5.6:

3. Kemudian cari kemiringan dan defleksi karena beban tersebut seperti telah dijelaskan pada seksi 5.3 dan 5.4.

4. Kemudian kemiringan pada *B* adalah sama dengan kemiringan karena beban total dikurangi dengan kemiringan karena beban tambahan.

5. Dengan cara yang sama, defleksi pada *B* adalah sama dengan defleksi karena beban total dikurangi dengan defleksi karena beban tambahan.

Contoh soal 5.5 Sebuah kantilever dengan lebar 75 mm dan tinggi 200 mm dibebani seperti ditunjukkan oleh gambar 5.7. Carilah kemiringan dan defleksi pada *B*. Ambil *E* = 200 GPa.



Gambar 5.7:

Jawab:

Diketahui: b = 75 mm
d = *200 mm*
w = 20 kN/m = 20 N/mm
l = 2 m = 2×10^3 mm
l_1 = 1 m = 1×10^3 mm
E = 200 GPa = 200 $\times 10^3$ N/mm^2

Kemiringan pada B

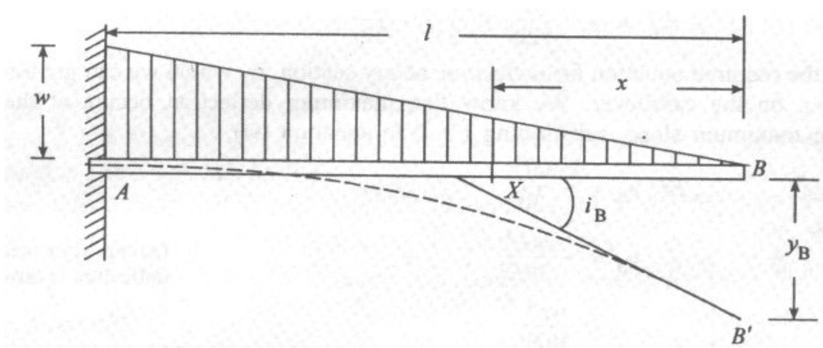
$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{75 \times (200)^3}{12} = 50 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\begin{aligned}
i_B &= \left[\frac{wl^3}{6EI}\right] - \left[\frac{w(l-l_1)^3}{6EI}\right] \\
&= \left[\frac{20\times(2\times10^3)^3}{6\times(200\times10^3)\times(50\times10^6)}\right] - \left[\frac{20[(2\times10^3)-(1\times10^3)]^3}{6\times(200\times10^3)\times(50\times10^6)}\right] \\
&= 0,00267 - 0,000333 = 0,00234 \text{ rad}
\end{aligned}$$

Defleksi pada B

$$\begin{aligned}
y_B &= \left[\frac{wl^4}{8EI}\right] - \left[\frac{w(l-l_1)^4}{8EI} + \frac{w(l-l_1)^3 l_1}{6EI}\right] \\
&= \left[\frac{20\times(2\times10^3)^4}{8\times(200\times10^3)\times(50\times10^6)}\right] \\
&\quad - \left[\frac{20\times[(2\times10^3)-(1\times10^3)]^4}{8\times(200\times10^3)\times(50\times10^6)} + \frac{20\times[(2\times10^3)-(1\times10^3)]^3(1\times10^3)}{6\times(200\times10^3)\times(50\times10^6)}\right] \\
&= 4,0 - 0,58 = 3,42 \text{ mm}
\end{aligned}$$

5.6 Kantilever Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual



Gambar 5.8:

Misalkan kantilever *AB* dengan panjang *l* mendapat beban bervariasi secara gradual dari nol pada *B* hingga *w* persatuan panjang ada *A* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.8.

Sekarang misalkan penampang *X* pada jarak *x* dari ujung bebas. Momen bending pada bidang ini:

$$M_X = -\frac{1}{2}\times\frac{wx}{l}\times x\times\frac{x}{3} = -\frac{wx^3}{6l}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^3}{6l} \tag{5.9}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^4}{24l} + C_1 \tag{5.10}$$

Pada $x = l$ maka $\frac{dy}{dx} = 0$. Substitusikan harga ini ke persamaan di atas:

$$0 = -\frac{wx^4}{24l} + C_1 \quad \text{atau} \quad C_1 = \frac{wl^3}{24}$$

sehingga:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^4}{24l} + \frac{wl^3}{24} \tag{5.11}$$

Ini merupakan persamaan untuk mencari kemiringan pada sembarang titik. Kemiringan maksimum akan terjadi pada ujung bebas dimana $x = 0$, sehingga kemiringan maksimum:

$$\begin{aligned} EI.i_B &= \frac{wl^3}{24} \\ i_B &= \frac{wl^3}{24EI} \quad \text{radian} \end{aligned}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan 5.13:

$$EI.y = -\frac{wx^5}{120l} + \frac{wl^3x}{24} + C_2 \tag{5.12}$$

Pada $x = l$ maka $y = 0$. Masukkan harga ini ke persamaan di atas:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{wl^4}{120l} + \frac{wl^4}{24} + C_2 \quad \text{atau} \quad C_2 = -\frac{wl^4}{30} \\ EI.y &= -\frac{wx^5}{120l} + \frac{wl^3x}{24} - \frac{wl^4}{30} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Ini adalah persamaan untuk mencari defleksi pada sembarang titik. Defleksi maksimum akan terjadi pada ujung bebas. Dengan mensubstitusikan $x = 0$ pada persamaan di atas maka defleksi maksimum:

$$\begin{aligned} EI.y_B &= -\frac{wl^4}{30} \\ y_B &= -\frac{wl^4}{30} \end{aligned}$$

Contoh soal 5.6 Sebuah kantilever mempunyai span memikul beban segitiga dari intensitas nol pada ujung bebas hingga 100 kN/m pada ujung tetap. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas. Ambil $I = 100 \times 10^3$ mm^4 dan E = 200 GPa

Jawab:

Diketahui: l = 2 m = 2×10^3 mm
w = 100 kN/m = 100 N/mm
I = 100 $\times 10^6$ mm^4
E = 200 GPa = 200×10^3 N/mm^2

Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{wl^3}{24EI} = \frac{100 \times (2 \times 10^3)^3}{24 \times (200 \times 10^3) \times (100 \times 10^6)} = 0,00167 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas kantilever

$$y = \frac{wl^4}{30EI} = \frac{100 \times (2 \times 10^3)^4}{30 \times (200 \times 10^3) \times (200 \times 10^6)} = 2,67 \text{ mm}$$

5.7 Kantilever Dengan Beberapa Beban

Jika kantilever mendapat beberapa beban terpusat atau terdistribusi merata, kemiringan dan defleksi pada titik tertentu pada kantilever merupakan penjumlahan aljabar dari kemiringan dan defleksi pada titik tersebut karena beban-beban yang bekerja secara individu.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah kantilever dengan panjang 2,4 m mendapat beban terpusat sebesar 30 kN pada ujung bebasnya. Carilah kemiringan dan defleksi kantilever tersebut. Rigiditas fleksural kantilever adalah 25×10^{12} N-mm^2.

2. Sebuah kantilever dengan lebar 150 mm dan tinggi 200 mm menonjol dengan panjang 1,5 m dari dinding. Carilah kemiringan dan defleksi kantilever pada ujung bebas jika ia mendapat beban terpusat sebesar 50 kN pada ujung bebasnya. Ambil E = 200 GPa.

3. Sebuah kantilever dengan panjang 1,8 m mendapat beban terdistribusi merata sebesar 10 kN/m pada keseluruhan panjangnya. Berapakah kemiringan dan defleksi batang pada ujung bebasnya? Ambil rigiditas fleksural batang sebesar $3,2 \times 10^{12}$ N-mm^2.

Bab 6

Defleksi Dengan Metode Momen Luas

Pada pembahasan sebelumnya kita telah bicarakan tentang kemiringan dan defleksi dari berbagai jenis batang dan kantilever. Penurunan rumus untuk kemiringan dan defleksi tersebut sulit dan panjang. Tetapi pada bab ini kita akan membicarakan metode grafik untuk mencari kemiringan dan defleksi batang dan kantilever, dimana metode ini cukup sederhana dan memberikan jawaban yang lebih cepat. Metode ini terkenal dengan nama metode momen luas, yang didasarkan atas teori Mohr.

Defleksi batang dan kantilever dengan metode momen luas didasarkan atas dua teori yang diberikan oleh Mohr:

Teori Mohr I. *Perubahan kemiringan antara dua titik, pada sebuah kurva elastis adalah sama dengan luas netto diagram momen bending antara titik ini dibagi dengan EI.*

Teori Mohr II. *Perpotongan dengan garis referensi vertikal tangen pada dua titik sembarang pada sebuah kurva elastis adalah sama dengan momen pada diagram momen bending antara dua titik ini pada garis referensi dibagi dengan EI.*

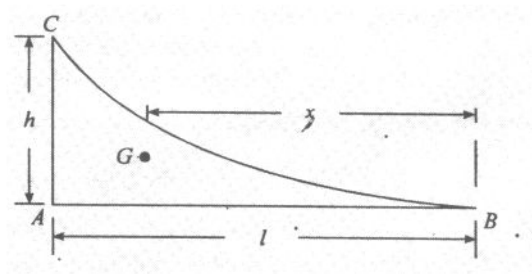
6.1 Luas dan Posisi Pusat Gravitasi Parabola

Sebuah parabola didefinisikan sebagai sebuah gambar yang mempunyai minimal sebuah sisi kurva parabola. Pada gambar 6.1 , sisi *CB* adalah kurva parabola, dimana *AB* dan *AC* adalah garis lurus.

Kurva parabola secara umum dinyatakan dengan rumus kx^n, dimana *n* adalah derjat kurva parabolik. Tabel berikut memberikan luas dan posisi dai berbagai derjat kurva parabola cekung.

Harga luas (*A*) dan jarak (*x*) bisa dinyatakan oleh persamaan berikut:

$$(A) = (l \times h) \times \frac{1}{n+1}$$



Gambar 6.1: Parabola cekung.

Tabel 6.1:

No.	Harga *n*	Luas (*A*)	Jarak antara *B* dan *G* (*x*)
1	2	$(l \times h) \times \frac{1}{3}$	$l \times \frac{3}{4}$
2	3	$(l \times h) \times \frac{1}{4}$	$l \times \frac{4}{5}$
3	4	$(l \times h) \times \frac{1}{5}$	$l \times \frac{5}{6}$

dan jarak

$$(x) = l \times \frac{n+1}{n+2}$$

6.2 Batang Tumpuan Sederhana dengan Beban Terpusat Di Tengah

Misalkan sebuah batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang *l* dan mendapat beban terpusat *W* pada *C* yaitu tengah-tengah batang seperti ditunjukkan oleh gambar 6.2 (*a*). Reaksi pada *A*:

$$R_A = R_B = \frac{W}{2}$$

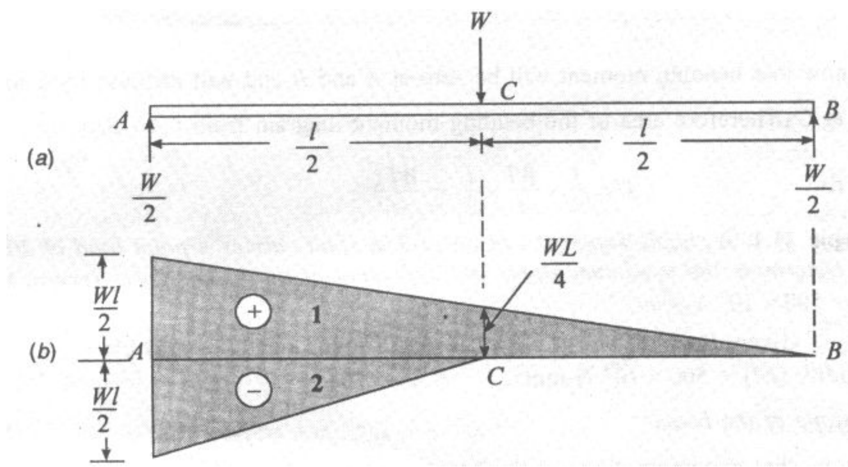
Momen bending pada *A* karena reaksi R_B:

$$M_1 = +\frac{Wl}{2}$$

Dengan cara yang sama, momen bending pada *A* karena beban *W*:

$$M_2 = -W \times \frac{l}{2} = -\frac{Wl}{2}$$

Sekarang gambarlah diagram momen bending dengan kedua momen di atas. Momen bending positif digambar di atas garis rujukan, dan momen negatif dibawahnya,



Gambar 6.2: Batang tumpuan sederhana dengan beban terpusat di tengah.

seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.2 (*b*). Diagram momen bending ini disebut *diagram momen bending komponen*.

Sekarang, untuk mencari kemiringan pada *B*, misalkan diagram momen bending dari *C* ke *B*. Luas diagram momen bending dari *C* ke *B*:

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{Wl}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{Wl^2}{16}$$

dan jarak pusat gravitasi diagram momen bending dari *B*:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} = \frac{l}{3} \\ i_B &= \frac{A}{EI} = \frac{Wl^2}{16EI} \end{aligned}$$

Berdasarkan geometri batang:

$$i_A = \frac{Wl^2}{16EI}$$

dan

$$y_C = \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl^2}{16} \times \frac{l}{3}}{EI} = \frac{Wl^3}{48EI}$$

Metode Alternatif

Kita tahu bahwa momen bending nol padfa *A* dan *B* dan menaik secara garis lurus hingga $\frac{Wl}{4}$ pada *C*. Karena itu luas diagram momen bending dari *C* ke *B*:

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{Wl}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{Wl^2}{16}$$

Contoh soal 6.1 Sebuah batang dengan tumpuan sederhana mempunyai panjang 2 m mendapat beban terpusat 20 kN pada tengah-tengah batang. Carilah kemiringan dan defleksi batang. Ambil rigiditas fleksural batang sebesar 500×10^9 N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: *l* = 2 m = 2×10^3 mm
W = 20 kN/m = 20×10^3 N
EI = 500 $\times 10^9$ N-mm^2

Kemiringan maksimum batang

$$i_B = \frac{Wl^2}{16EI} = \frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{16 \times (500 \times 10^9)} = 0,01 \text{ rad}$$

Defleksi maksimum batang

$$y_C = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^3}{48 \times (500 \times 10^9)} = 6,67 \text{ mm}$$

6.3 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Eksentrik

Misalkan batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang *l* mendapat beban terpusat *W* pada *C* sedemikian sehingga *AC* = *a* dan *CB* = *b* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.3 (*a*). Reaksi pada *A*:

$$R_A = \frac{Wb}{l} \quad \text{dan} \quad R_B = \frac{Wa}{l}$$

dan momen bending pada *A* karena reaksi R_B:

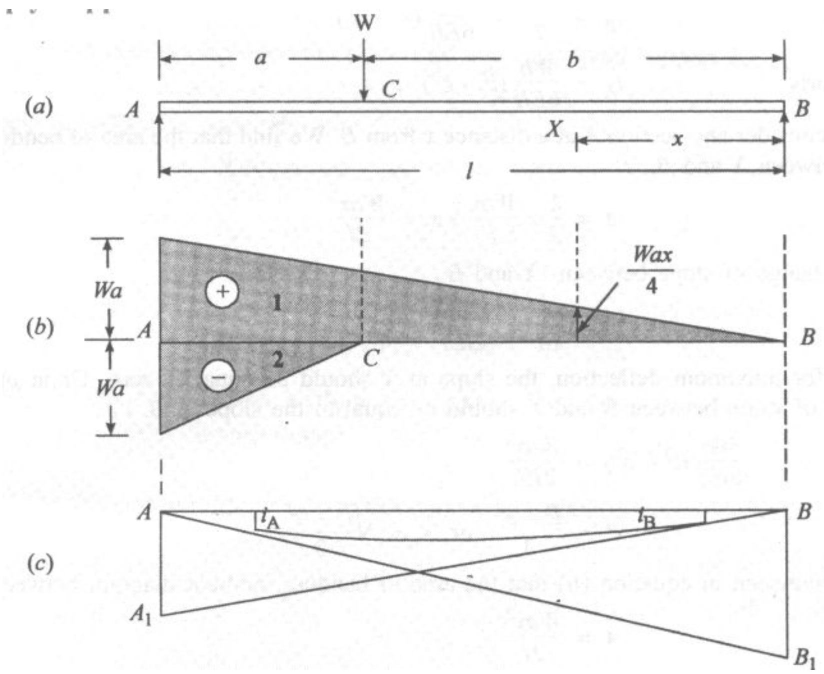
$$M_1 = +\frac{Wa}{l} \times l = +Wa$$

dan

$$M_2 = -Wa$$

Sekarang gambarlah diagram momen bending gabungan seperti yang diperlihatkan oleh gambar 6.3 (*b*). Luas diagram momen bending positif:

$$A_1 = \frac{1}{2} \times Wa \times l = \frac{Wal}{2}$$



Gambar 6.3: Beban terpusat eksentrik.

dan luas diagram momen bendinmg negatif:

$$A_2 = \frac{1}{2} \times Wa \times a = \frac{Wa^2}{2}$$

Dari geometri pembebanan, terlihat bahwa kemiringan pada sembarang penampang tidak diketahui. Karena itu kemiringan dan defleksi tidak bisa langsung dicari. Sekarang gambar garis vertikal melalui *A* dan *B*. Misalkan AA_1 dan BB_1 sama dengan perpotongan tangen pada *A* dan *B* seperti ditunjukkan oleh gambar 6.3 (*c*).

$$AA_1 = i_B \times l$$

tetapi

$$AA_1 = \frac{A_1x_1 - A_2x_2}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{Wal}{2} \times \frac{l}{3}\right) - \left(\frac{Wa^2}{2} \times \frac{a}{3}\right)\right] = \frac{Wa}{6EI}(l^2 - a^2)$$

$$i_B = \frac{AA_1}{l} = \frac{Wa}{6EIl}(l^2 - a^2)$$

dengan cara yang sama:

$$i_A = \frac{Wb}{6EIl}(l^2 - b^2)$$

Misalkan sembarang penampang *X* pada jarak *x* dari *B*. Luas diagram momen bending antara *X* dan *B*:

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{Wax}{l} \times x = \frac{Wax^2}{2l} \tag{6.1}$$

Perubahan kemiringan antara *X* dan *B*:

$$= \frac{A}{EI} = \frac{Wax^2}{2lEI} \tag{6.2}$$

Untuk defleksi maksimum, kemiringan pada *X* harus sama dengan nol, atau dengan kata lain perubahan kemiringan antara *B* dan *X* harus sama dengan kemiringan pada *B*:

$$\begin{aligned} \frac{Wa}{6lEI}(l^2 - a^2) &= \frac{Wax^2}{2lEI} \\ x^2 &= \frac{(l^2 - a^2)}{3} \quad \text{atau} \quad x = \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}} \end{aligned}$$

Kita lihat bahwa pada persamaan 6.1 luas diagram momen bending antara *X* dan *B*:

$$A = \frac{Wax^2}{2l}$$

dan jarak gravitas diagram momen bending dari *B*:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2x}{3} \\ y_x &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wax^2}{2l} \times \frac{2x}{3}}{EI} = \frac{Wax^3}{3EIl} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Untuk mendapatkan defleksi maksimum, substitusikan harga $x = \sqrt{\frac{l^2-a^2}{3}}$ ke persamaan 6.3:

$$y_{max} = \frac{Wa}{3EIl}\left(\sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}}\right)^3 = \frac{Wa}{9\sqrt{3}lEI}(l^2 - a^2)^{3/2}$$

Contoh soal 6.2 Batang dengan tumpuan sederhana mempunyai panjang 2,8 m mendapat beban terpusat sebesar 60 kN pada jarak 1 m dari tumpuan kiri *A*. Pada lokasi mana terjadi defleksi maksimum? Cari juga besarnya defleksi di bawah beban. Ambil *EI* batang sebesar 4×10^{12} N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: *l* = 2,8 m = $2,8 \times 10^3$ mm
W = 60 kN = 60×10^3 N
a = 1 m = 1×10^3 mm
EI = 4 $\times 10^{12}$ N-mm^2

Posisi defleksi maksimum

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}} = \sqrt{\frac{(2,8 \times 10^3)^2 - (1 \times 10^3)^2}{3}} \\ &= 1,51 \times 10^3 \text{ mm} = 1,51 \text{ m} \end{aligned}$$

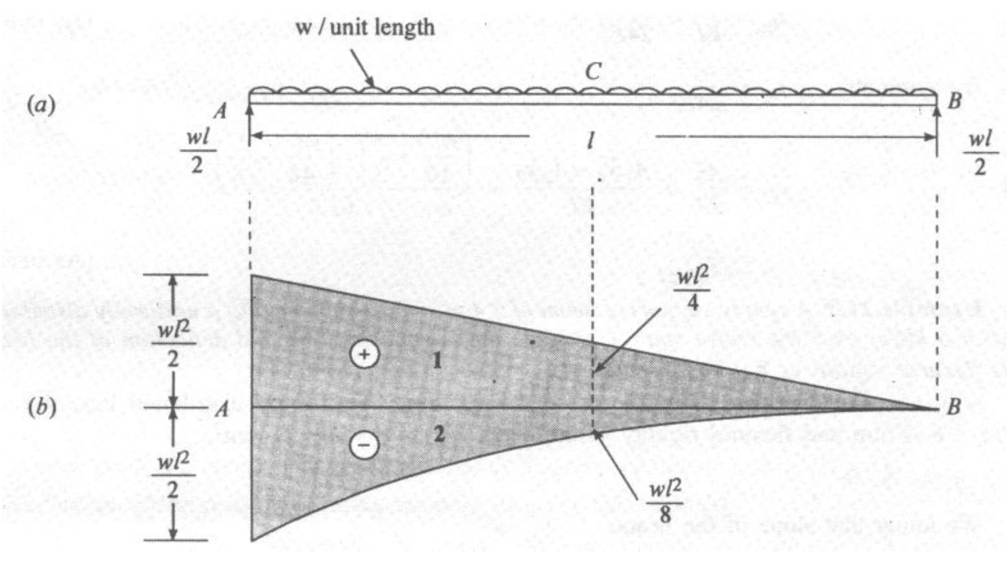
Besarnya defleksi di bawah beban

$$b = l - a = (2,8 \times 10^3) - (1 \times 10^3) = 1,8 \times 10^3 \text{ m}$$

dan besarnya defleksi di bawah beban:

$$\begin{aligned} &= \frac{Wab}{6EIl}(l^2 - a^2 - b^2) \\ &= \frac{(60 \times 10^3) \times (1 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)}{6 \times (4 \times 10^{12}) \times (2,8 \times 10^3)} \\ &\quad \times [(2,8 \times 10^3)^2 - (1 \times 10^3)^2 - (1,8 \times 10^3)^2] \\ &= (1,61 \times 10^{-6}) \times (3,6 \times 10^6) = 5,8 \text{ mm} \end{aligned}$$

6.4 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terdistribusi Merata



Gambar 6.4: Beban terdistribusi merata.

Misalkan batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang l mendapat beban terdistribusi merata *w* per satuan panjang seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.4 (*a*). Reaksi pada *A*:

$$R_A = R_B = \frac{wl}{2}$$

dan momen bending pada *A* karena reaksi R_B:

$$M_1 = \frac{wl}{2} \times l = \frac{wl^2}{2}$$

Dengan cara yang sama, momen bending pada *A* karena beban *w*:

$$M_2 = -\frac{wl}{2} \times \frac{l}{2} = -\frac{wl^2}{2}$$

Sekarang gambarlah kedua momen bending seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.4 (*b*). Luas diagram momen bending positif antara *C* dan *B*:

$$A_1 = +\frac{1}{2} \times \frac{wl^2}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{wl^3}{16}$$

dan luas diagram momen bending negatif antara *C* dan *B*:

$$A_2 = \frac{1}{3} \times \frac{wl^2}{8} \times \frac{l}{2} = \frac{wl^3}{48}$$

Luas netto diagram momen bending:

$$A = A_1 - A_2 = \frac{wl^3}{16} - \frac{wl^3}{48} = \frac{wl^3}{24}$$

dan jarak pusat gravitasi dari diagram momen bending positif pada *CB* dari *B*:

$$x_1 = \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} = \frac{l}{3}$$

Dengan cara yang sama, jarak diagram momen bending negatif pada *CB* dari *B*:

$$\bar{x} = \frac{3}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{3l}{8}$$

maka:

$$i_B = \frac{A}{EI} = \frac{wl^3}{24EI}$$

dan

$$i_A = \frac{wl^3}{24EI}$$

dan

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{A_1\bar{x}_1 - A_2\bar{x}_2}{EI} = \frac{\left(\frac{wl^3}{16} \times \frac{l}{3}\right) - \left(\frac{wl^3}{48} \times \frac{3l}{8}\right)}{EI} \\ &= \frac{5wl^4}{384EI} \end{aligned}$$

Contoh soal 6.3 Batang tumpuan sederhana dengan span 2,4 m mendapat beban terdistribusi merata 6 kN/m di keseluruhan batang. Hitunglah kemiringan dan defleksi maksimum pada batang jika rigiditas fleksural adalah 8×10^{12} N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: *l* = 2,4 m = $2,4 \times 10^3$ mm
w = 6 kN/m = 6 N/mm
EI = 8 $\times 10^{12}$ N-mm^2

Kemiringan batang

$$i_A = \frac{wl^3}{24EI} = \frac{6 \times (2,4 \times 10^3)^3}{24 \times (8 \times 10^{12})} = 0,00043 \text{ rad}$$

Defleksi batang

$$y_C = \frac{wl^3}{384EI} = \frac{5 \times 6 \times (2,4 \times 10^3)^4}{384 \times (8 \times 10^{12})} = 0,324 \text{ mm}$$

6.5 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual

Misalkan batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang *l* mendapat beban bervariasi secara bertahap dari nol pada *B* hingga *w* per satuan panjang pada *A* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.5 (*a*). Reaksi pada tumpuan:

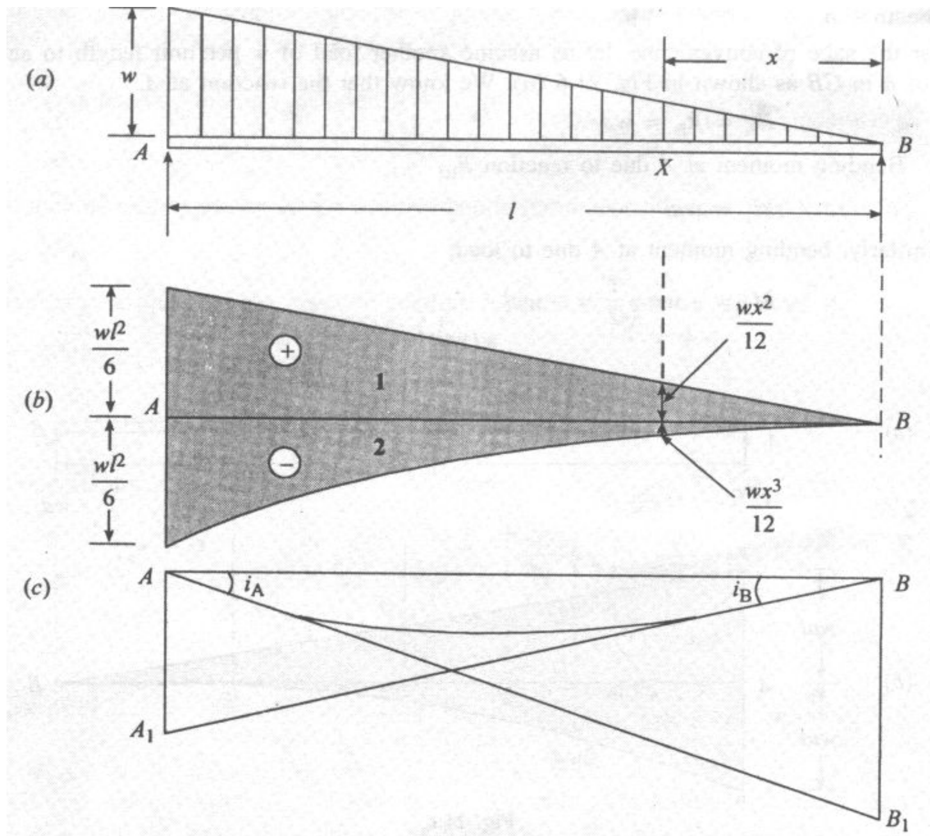
$$R_A = \frac{wl}{3} \quad \text{dan} \quad R_B = \frac{wl}{6}$$

Momen bending pada *A* karena reaksi R_B:

$$M_1 = \frac{wl}{6} \times l = \frac{wl^2}{6}$$

Dengan cara yang sama, momen bending pada *A* karena beban:

$$M_2 = -\frac{wl}{2} \times \frac{l}{3} = -\frac{wl^2}{6}$$



Gambar 6.5:

Sekarang gambarlah kedua diagram momen ini, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.5 (*a*).

Luas diagram momen positif:

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{wl^2}{6} \times l = \frac{wl^3}{12}$$

dan luas diagram momen bending negatif:

$$A_2 = \frac{1}{4} \times \frac{wl^2}{6} \times l = \frac{wl^3}{24}$$

Dari geometri pembebanan, terlihat bahwa kemiringan pada sembarang penampang tidak diketahui. Sehingga kemiringan dan defleksi tidak bisa dicari secara langsung. Sekarang gambarlah garis vertikal melalui *A* dan *B*. Misalkan AA_1 dan BB_1 yang besarnya sama dengan perpotongan tangen pada *A* dan *B*, seperti yang diprlihatkan oleh gambar 6.5 (*c*).

$$AA_1 = i_B \times l \quad \text{dan} \quad BB_1 = i_A \times l$$

Tetapi

$$\begin{aligned} AA_1 &= \frac{A_1\bar{x}_1 - A_2\bar{x}_2}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{wl^3}{2} \times \frac{l}{3}\right) - \left(\frac{wl^3}{24} \times \frac{l}{5}\right)\right] = \frac{7wl^4}{360EI} \\ i_B &= \frac{7wl^4}{360EI} \quad \text{radian} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama:

$$\begin{aligned} BB_1 &= \frac{A_1\bar{x}_1 - A_2\bar{x}_2}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{wl^3}{12} \times \frac{2l}{3}\right) - \left(\frac{wl^3}{24} \times \frac{4l}{5}\right)\right] = \frac{wl^4}{45EI} \\ i_A &= \frac{wl^4}{45EI} \quad \text{radian} \end{aligned}$$

Sekarang, misalkan penampang *X* pada jarak *x* dari *B*. Kita peroleh bahwa luas diagram momen bending antara *X* dan *B*:

$$A = \left(\frac{1}{2} \times \frac{wlx}{62} \times x\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{wx^3}{6l} \times x\right) = \frac{wlx^2}{12} - \frac{wx^4}{24l}$$

kemiringan pada *X*:

$$\begin{aligned} i_X &= \frac{A}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{wlx^2}{12} - \frac{wx^4}{24l}\right) \\ 7l^4 &= 30lx^2 - \frac{15x^4}{l} \\ x &= 0,519l \end{aligned}$$

Defleksi pada *X*:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{A_1\bar{x}_1 - A_2\bar{x}_2}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{wlx^2}{12} \times \frac{2x}{3}\right) - \left(\frac{wx^4}{24l} \times \frac{4x}{5}\right)\right] \\ &= \frac{1}{EI}\left[\frac{wlx^3}{18} - \frac{wx^5}{30l}\right] \end{aligned}$$

Defleksi pada tengah batang, dimana $x = l/2$:

$$y_C = \frac{0,00651wl^4}{EI}$$

Defleksi maksimum terjadi pada $x = 0{,}519l$:

$$y_{max} = \frac{0,00652wl^4}{EI}$$

Contoh soal 6.4 Batang tumpuan sederhana dengan span 3,6 m mendapat beban segitiga 3 kN/m pada *A* dan nol pada *B*. . Hitunglah kemiringan pada *A* dan *B*. Ambil harga rigiditas fleksural 6×10^{12} N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: l = 3,6 m = $3,6 \times 10^3$ mm
beban pada A = w = 3 kN/m = 3 N/mm
EI = 6 $\times 10^{12}$ N-mm^2

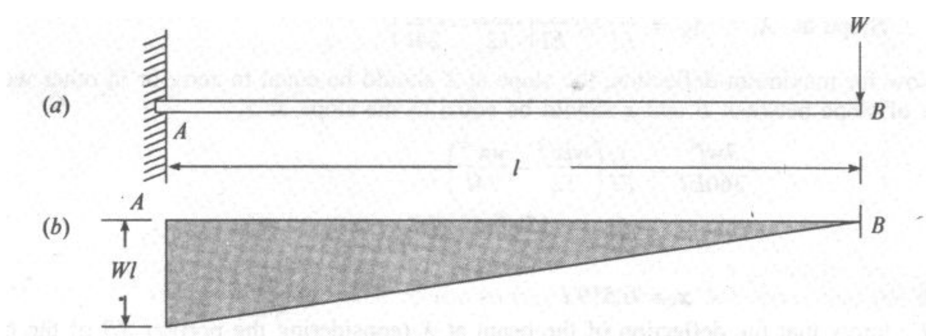
Kemiringan pada A

$$i_A = \frac{wl^3}{45EI} = \frac{3 \times (3,6 \times 10^3)^3}{45 \times (6 \times 10^{12})} = 0,00052 \text{ rad}$$

Kemiringan pada B

$$i_B = \frac{7wl^3}{360EI} = \frac{7 \times 3 \times (3,6 \times 10^3)^3}{360 \times (6 \times 10^{12})} = 0,00045 \text{ mm}$$

6.6 Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Ujung Bebasnya



Gambar 6.6: Beban terpusat pada ujung bebas.

Misalkan batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang *l* mendapat beban terpusat *W* pada ujung bebasnya seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.6 (*a*). Momen bending akan nol pada *B* dan menaik menurut garis lurus hingga *Wl* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.6 (b).

Luas diagram momen bending:

$$A = \frac{1}{2} \times Wl.l = \frac{Wl^2}{2}$$

dan jarak antara pusat gravitasi diagram momen bending dengan *B*:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{2l}{3} \\
i_B &= \frac{A}{EI} = \frac{Wl^2}{2EI} \quad \text{radian} \\
y_B &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl^2}{2} \times \frac{2l}{3}}{EI} = \frac{Wl^3}{3EI}
\end{aligned}
$$

Contoh soal 6.5 Batang kantilever dengan span 2,0 m mendapat beban terpusat sebesar 30 kN pada ujung bebasnya. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas. Ambil harga *EI* sebesar 8×10^{12} N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: *l* = 2 m = 2×10^3 mm
W = 30 kN = 30×10^3 N
EI = 8 $\times 10^{12}$ N-mm^2

Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{Wl^2}{2EI} = \frac{(30 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{2 \times (8 \times 10^{12})} = 0,0075 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas

$$y_B = \frac{Wl^3}{3EI} = \frac{(30 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^3}{3 \times (8 \times 10^{12})} = 10 \text{ mm}$$

6.7 Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Sembarang Titik

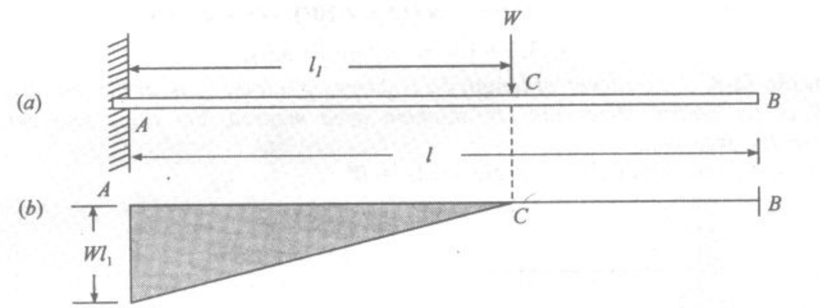
Misalkan batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang *l* mendapat beban terpusat *W* pada jarak l_1 dari ujung tetap seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.7 (*a*). Momen bending akan nol pada *B* dan *C* dan akan menaik menurut garis lurus hingga *Wl* pada *A* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.7 (b*).*

Luas diagram momen bending:

$$A = \frac{1}{2} \times Wl_1.l_1 = \frac{Wl_1^2}{2}$$

dan jarak antara pusat gravitasi diagram momen bending dengan *B*:

$$\bar{x} = \frac{2l_1}{3} + (l - l_1)$$



Gambar 6.7: Beban terpusat tidak pada ujung.

$$
\begin{aligned}
i_B &= \frac{A}{EI} = \frac{Wl_1^2}{2EI} \quad \text{radian} \\
y_B &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl_1^2}{2} \times \left(\frac{2l}{3} + (l - l_1)\right)}{EI} \\
&= \frac{Wl_1^3}{3EI} + \frac{Wl_1^2}{2EI}(l - l_1)
\end{aligned}
$$

Contoh soal 6.6 Batang kantilever dengan span 2,4 m mendapat beban terpusat sebesar 15 kN pada jarak 1,8 m dari ujung tetap. Berapakah harga kemiringan dan defleksi pada ujung bebas, jika rigiditas fleksural penampang batang 9×10^{12} N-mm^2.

Jawab:

Diketahui: *l* = 2,4 m = $2,4 \times 10^3$ mm
l_1 = 1,8 m = $1,8 \times 10^3$ mm
W = 15 kN = 15×10^3 N
EI = 9 $\times 10^{12}$ N-mm^2

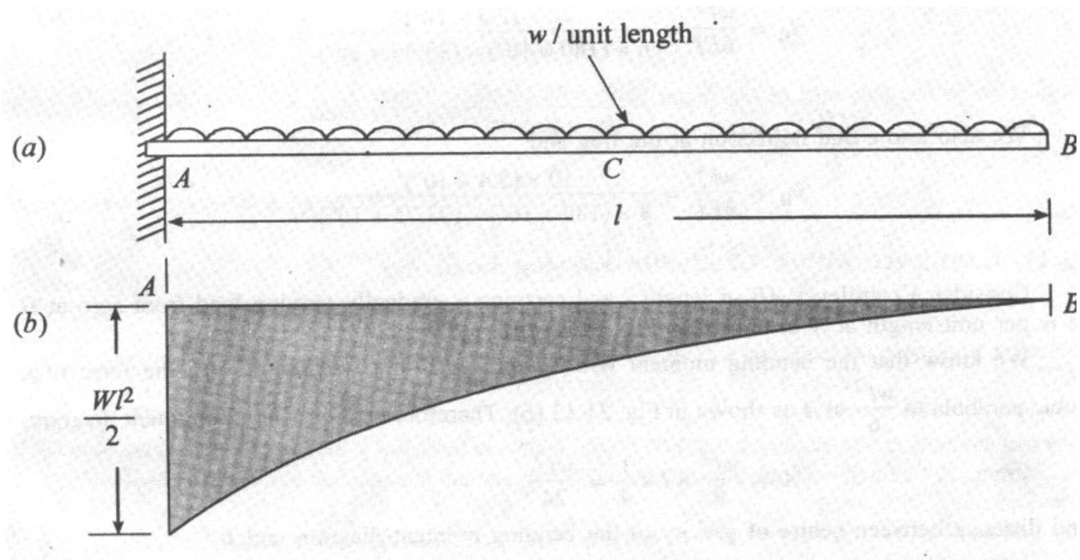
Kemiringan pada ujung bebas

$$
i_B = \frac{Wl_1^3}{2EI} = \frac{(15 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)^2}{2 \times (9 \times 10^{12})} = 0,0027 \text{ rad}
$$

Defleksi pada ujung bebas

$$
\begin{aligned}
y_B &= \frac{Wl_1^3}{3EI} + \frac{Wl_1^2}{2EI}(l - l_1) \\
&= \frac{(15 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)^3}{3 \times (9 \times 10^{12})} + \frac{(15 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)^2}{2 \times (9 \times 10^{12})} \\
&\quad \times [(2,4 \times 10^3) - (1,8 \times 10^3)] \\
&= 3,2 + 1,6 = 4,8 \text{ mm}
\end{aligned}
$$

6.8 Kantilever Dengan Beban Terdistribusi Merata



Gambar 6.8: Beban terdistribusi merata.

Misalkan batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang *l* mendapat beban terdistribusi merata *w* per satuan panjang seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.8 (*a*). Momen bending akan nol pada *B* dan akan menaik membentuk parabola hingga $\frac{wl^2}{2}$ pada *A* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.8 (b).

Luas diagram momen bending:

$$A = \frac{wl^2}{2} \times l \times \frac{1}{3} = \frac{wl^3}{6}$$

dan jarak antara pusat gravitasi diagram momen bending dengan *B*:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{3l}{4} \\ i_B &= \frac{A}{EI} = \frac{wl^3}{6EI} \quad \text{radian} \\ y_B &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{wl^3}{6} \times \frac{3l}{4}}{EI} = \frac{wl^4}{8EI} \end{aligned}$$

Contoh soal 6.7 Batang kantilever dengan lebar 120 mm dan tinggi 150 mm mendapat beban terdistribusi merata sebesar 10 kN/m di keseleuruhan panjangnya yaitu 2,4 m. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas. Ambil *E* = 180 GPa.

Jawab:

Diketahui: b = 120 mm
d = 150 mm
w = 10 kN/m = 10 N/m
E = 180 GPa = 180 $\times 10^3$ N/mm^2

Kemiringan pada ujung bebas

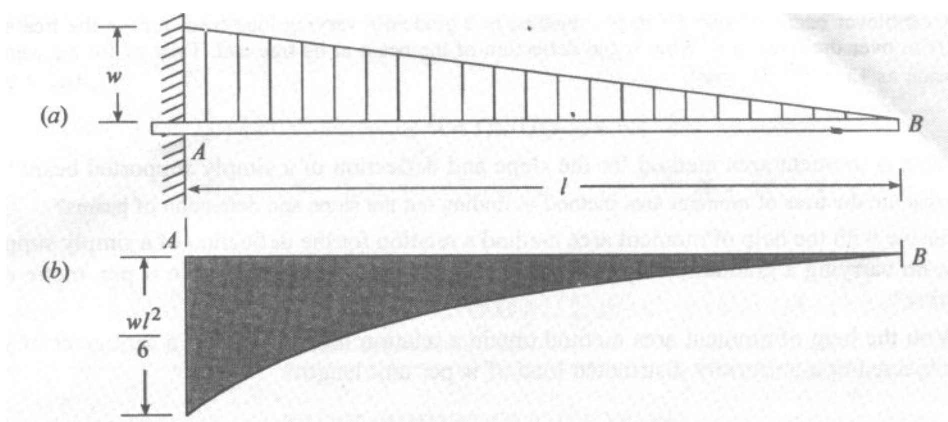
$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{120(150)^3}{12} = 33,75 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$i_B = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{10 \times (2,4 \times 10^3)^3}{6 \times (180 \times 10^3) \times (33,75 \times 10^6)} = 0,0038 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{wl^4}{8EI} \\ &= \frac{10 \times (2,4 \times 10^3)^4}{8 \times (180 \times 10^3) \times (33,75 \times 10^6)} = 6,83 \text{ mm} \end{aligned}$$

6.9 Kantilever Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual



Gambar 6.9:

Misalkan batang tumpuan sederhana *AB* dengan panjang *l* mendapat beban bervariasi secara gradual dari nol pada *B* hingga *w* persatuan panjang pada *A* seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.9 (*a*). Momen bending akan nol pada *B* dan menaik menurut parabola kubus hingga $\frac{wl^2}{6}$ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.9 (b).

Luas diagram momen bending:

$$A = \frac{Wl^2}{6} \times l \times \frac{1}{4} = \frac{Wl^3}{24}$$

dan jarak antara pusat gravitasi diagram momen bending dengan *B*:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= l \times \frac{4}{5} \\
i_B &= \frac{A}{EI} = \frac{wl^3}{24EI} \quad \text{radian} \\
y_B &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl^3}{24} \times l \times \frac{4}{5}}{EI} = \frac{wl^4}{30EI}
\end{aligned}$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah kantilever dengan panjang 2,4 m menerima beban terpusat sebesar 37,5 kN pada ujung bebasnya. Carilah kemiringan dan defleksi dibawah beban. Ambil harga rigiditas fleksural penampang batang 20×10^{12} N-mm^2.

2. Sebuah kantilever dengan panjang 3 m menerima beban terpusat sebesar 20 kN pada jarak 1 m dari ujung bebasnya. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang. Ambil *EI* 8×10^{12} N-mm^2.

3. Sebuah kantilever dengan panjang 1,8 m menerima beban terdistribusi merata 5 kN/m pada keseluruhan panjangnya. Carilah kemiringan dan defleksi batang pada ujung bebasnya, jika harga rigiditas fleksural penampang batang $6,4 \times 10^{12}$ N-mm^2.

DAFTAR PUSTAKA

1. RS. Khurmi, *Strength of Material,* S. Chand & Company Ltd., 2002.
2. Popov, *Mekanika Teknik*, Erlangga.
3. Timoshenko, *Teory of Elastisity,* McGraw Hill Book Co.